Math. P. 378

<36632901930015

<36632901930015

Bayer. Staatsbibliothek

Christian Riesen's

hochfürstlich speierischen Hofkammerraths, und der pfälzischen ökonomischen Gesellschaft Mitglieds

Algebra

für

Sehende und Blinde.

Bayer. ...
f. Ernährung, Landwirtschaft u. Forsten
Ministerialforstabteilung
Bücherei

Mannheim,
bei C. F. Schwan, kuhrfürstl. Hofbuchhändler
1777.

Aa 2
14
358
Wbg/62/31

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Blinde bekommen nicht auf dieselbige Art Begriffe von Dingen als Sehende. Deswegen sieht es in dem Kopfe eines Blinden ganz anders aus, als bei den Sehenden. Lezterer hat die Bilder der Dinge mit den Farben vor sich, mit welchen dieselben sich seinen Augen vorgestellet haben. Der Blinde befühlet alles, und dünket sich alles wieder zu befühlen, was er im Kopfe überdenket. Selbst die Vorstellung der Schönheit eines Gegenstandes ist bei ihm anders nichts, als die Vorstellung der angenehmen Empfindung, die er bekommen hat, als seine Finger über die glatte und zarte Fläche mit Vergnügen hin und herfuhren. Diese Verschiedenheit der Vorstellungen, und die

verschiedenen Wege, zu denselben zu gelangen, sezet nothwendiger Weise eine Verschiedenheit der Lehrart, und besondere Kunstgriffe für Blinde voraus. Dieses einzige ist Ursache genug, die algebraischen Schriften mit gegenwärtiger zu vermehren, ohne den Werth derselben im geringsten zu vermindern. Die vielen Aufgaben, die sie enthält, wird man schwerlich für überflüssig halten. Durch Uebung gelangt man erst zur Fertigkeit, und erstere hat man gewiß an einer Menge von Aufgaben. An der Auswahl derselben wird wohl wenig zu erinnern sein. Das angenehme ist mit dem Nüzlichen verbunden worden, und hat dabei seinen eigenen Nuzen. Es ist durchgängig diese Ordnung befolget worden, daß schwerere Aufgaben auf leichtere kommen. Bei etlichen ist die Ausarbeitung nicht so vollständig ausgefallen, damit der Anfänger auch zum eigenen Nachdenken etwas übrig behalte. Nicht jedermann will immer an der Hand geführet sein. Geometrische Aufgaben wird man hier nicht suchen wollen; sie sind oh-

ne Figuren unverständlich, und fodern schon eine Kenntniß in der Geometrie, welche aber eine Fertigkeit in der Algebra voraussezet.

Die Rechentafeln für die Algebra sind eben dieselbigen, die ich in der Rechenkunst beschrieben habe. Die unterdessen damit gemachten Veränderungen, und ihren algebraischen Gebrauch wird eine besondere Beschreibung zeigen, worin man zugleich die Art, alle mathematische Figuren für Blinde zu zeichnen, und andere Kunstgriffe finden wird.

Diese Tafeln sind in dem 24 B. 1 St. der allg. deutschen Bibliotek sehr mangelhaft beschrieben worden. Recensent scheint meine Rechenkunst für Sehende und Blinde zu flüchtig durchblättert zu haben; gelesen hat er sie gewiß nicht. Denn wie er glaubt und schreibt, gehört zur jeden Zahl ein Brettchen „ deren „ mehrere neben und untereinander gestellet „ würden, weswegen die Rechentafel etwas „ groß ausfallen würde". Meine Schuld ist es nicht, daß er nicht bemerkt hat, wie ich die

ganze Rechentafel für die schwersten Rechnungen auf zwei Brettchen eingeschränket habe, die natürlicher Weise mehr als zwei Zahlen fassen müssen. Ihr Mas ist genau bestimmt; und eine Abbildung von 6 Vierecken in natürlicher Größe in Kupfer beigelegt worden. Die Länge und Breite dieser Tafeln habe ich nicht allein im Zollmase, sondern auch nach der Anzahl der darauf befindlichen Vierecke beschrieben, welchemnach beide Tafeln nebeneinander kaum mehr Raum einnehmen, als ein Viertelbogen Papier. Da nun Recensent meine Tafeln so irrig und widersinnig, wider meine Beschreibung vorlegt: so ist ihm nicht zuzumuthen, dieselben mit den Saundersonischen zu vergleichen, beider Unterschied zu bemerken, und ihren Werth oder Unwerth näher zu bestimmen.

Beschreibung der algebraischen Zeichen, und mathematischen Figuren für Blinde.

Es ist beinahe Verwegenheit, einen Blinden in das mathematische Feld zu führen. Froh konnte ich sein, daß der Versuch im Rechnen so wohl ausgefallen war. Allein der tägliche Umgang mit den Tafeln, die Nothwendigkeit, sich um neue Erläuterungsmittel umzusehen, wenn unerwartete Hindernisse in den Weg kamen, und endlich die so glücklich abgeänderten Saundersonischen Tafeln bothen immer neue Vortheile an, und flößeten dadurch frischen Muth ein, einen ungebanten Weg herzhaft anzutreten. Der Erfolg entsprach meinem Unternehmen: mit Nuzen haben wir uns in die Mathematik gewaget.

Die Algebra

machte nach der Rechenkunst den Anfang. Zu den algebraischen Rechnungen wurden unsere Tafeln dadurch besonders geschickt, daß die

Vierecke, anstatt mit blosen Linien begränzet zu sein, Vertiefungen oder Einschnitte bekommen haben. Diese Vertiefungen sind es, die den Blinden gleichsam an der Hand in die Algebra geführet haben. Die Löcher in denselben gaben ein leichtes Mittel an, mit blosen Zahlzäpfchen die algebraischen Zeichen auszudrücken. Man lege eine Tafel vor sich: so gehen einige Vertiefungen quer, und andere senkrecht durch die Fläche. Zwischen jedem Vierecke sind an allen Seiten drei Löcher eingeboret; sie stehen mit den Löchern der Vierecke in einer Reihe, und haben in der ganzen Tafel einerlei Bedeutung. Von den senkrechten bedeutet das obere Loch das Zusammenziehungszeichen +; das mittlere das Gleichungszeichen =; und das untere das Abziehungszeichen —. Soll nun 3+4 auf der Tafel gezeichnet werden: so zeichnet man in zwei Vierecken nebeneinander die Zahlen 3 und 4, eben als wenn man 34 schreiben wollte. Zwischen diesen beiden Vierecken stecket man in das obere Loch der Vertiefung ein Zahlzäpfchen

ein:

ein: so hat man $3+4$. Man rücke das Zäpfchen in das mittlere Loch: so bekommt man $3=4$. Wird das Zäpfchen bis in das untere Loch gesezet: so hat man $3-4$. Da haben wir in einem kleinen Raume mit einem einzigen Zahlzäpfchen dreierlei Ausdrücke; wie wichtig ein solcher Vortheil ist, läßt sich ohne Beweise leicht einsehen.

In dem Kreuzschnitte dieser Vertiefungen bemerket man mit einem Zahlzäpfchen die Wurzeln. Diesem nach wird $\sqrt{24}$ ausgedrücket: wenn man im Kreuzschnitte oben vor den zwei Vierecken, worin 24 steht, ein Zahlzäpfchen einstecket. Soll man aber $\sqrt[3]{24}$ oder $\sqrt[4]{24}$ schreiben: so stecket man noch ein Zahlzäpfchen in 3 oder 4 linker Hand gleich über dem Wurzelzeichen.

Die Zeichen der Grösen sind entweder Zahlzeichen, oder Buchstaben; erstere sind schon in der Rechenkunst beschrieben worden. Die Buchstaben bestehen aus so viel besondern Zäpfchen von verschiedener Figur, die das Gefühl gar leicht unterscheidet.

1. x ist ein Zäpfchen, das oben einen runden Kopf hat.

2. y ist oben bis in die Hälfte viereckig.

3. z ist so dreieckig.

4. a ist ganz rund, oben breiter und platt, wie ein gestürzter Zuckerhut.

5. b ist ein Zäpfchen mit einem Dache, wie ein Regenschirm, worauf ein klein Knöpfchen steht.

6. Wenn das a Zäpfchen oben auf der Seite mit einer runden Feile ausgefeilet wird: so entsteht daraus c.

7. d wird mit einem Zäpfchen ausgedrücket, das oben eine halbe Scheibe hat.

8. e ist auf beiden Seiten ausgehölet.

9. f ist ein Zäpfchen mit einem Kreuze.

10. g ist eine ganze Krücke.

11. h ist eine halbe Krücke.

12. m ist ein Zäpfchen, dessen Kopf 2 Ringe hat.

13. Ein solcher halber Kopf macht n.

14. Endlich ist noch ein Vervielfältigungszeichen dabei, das anders nichts ist, als ein x Zäpfchen mit einem halben Kopfe.

Alle diese Zeichen werden in so viel Abtheilungen eines papiernen Kästchens aufbehalten, das $7\frac{1}{2}$ Zoll lang, und 6 breit ist, woran unten zwei Tafeln eingeschoben werden. Das ganze Schreibzeug läßt sich leicht im Sacke nachtragen, wenn man nicht lieber ein kleineres haben will. In dem Tischkasten, der in der Rechenkunst beschrieben ist, sind noch mehr Zeichen vorräthig.

Betrachtet man die beschriebenen Zeichen: so wird man ihre Verschiedenheit dergestalt angebracht finden, daß sich jedes Zäpfchen von dem andern durch das Gefühl leicht unterscheiden läßt, sie mögen liegen oder stehen. Zu diesem Ende sind die Merkmale alle erhaben. Vertiefungen sind nur dann merkbar, wenn sie weit genug sind, und scharfe Ecke haben, nämlich wenn die Flächen rechte Winkel mit einander machen. So bald diese Winkel stumpf werden: fahren die Finger darüber her, und man glaubt eine zusammenhangende Fläche zu fühlen. Deßwegen sind die Druckereibuchstaben

ei-

einem Blinden unbrauchbar. Der Finger fährt über die Züge hinweg, ohne die Figur zu unterscheiden. Der blinde Sezer des Recensenten meiner Rechenkunst im 24 B. a. d. B. ist demnach ein unnüzer Einfall.

Mit diesen Zeichen haben wir die Algebra nicht wenig durchgearbeitet, selbst die Differential- und Integralrechnungen sind nicht einmal ausgenommen worden. Muster algebraischer Ausdrücke sind folgende:

24a schreibt man so: neben 24 steht rechts im Einschnitte a.

Ein a Zäpfchen in 2 bedeutet a^2; in 3 bedeutet es a^3.

$24a^3$ steht so: 24 für sich, danach a in 3.

a^m so: m in 1 und a darüber im Einschnitte.

am, beide im Einschnitte.

am^2, a im Einschnitte, m in 2.

Die Gleichung $4ax^2 - bx + y^m + 24bc = abc$ wird auf folgende Art geschrieben, und nimmt 6 Vierecke ein. Im ersten zur Linken

steht

steht das Zahlzäpfchen in 4, a darüber im Einschnitte, und x in 2, das heist dann $4ax^2$.

Daneben steht im Einschnitte ein Zahlzäpfchen für —, über dem zweiten Vierecke stehen b und x im Einschnitte, welches zusammen — bx bedeutet.

Vor dem dritten Vierecke steht oben im senkrechten Einschnitte +, im Vierecke in 1 steht m, und y darüber im Einschnitte, das gibt $+ y^m$.

Nach dem + Zeichen folgt 24, über 4 stehen im Einschnitte b und c, welches + 24bc ausdrücket.

Nach = werden über das lezte Viereck im Einschnitte abc geschrieben: so ist die ganze Gleichung da.

Wenn das Vervielfältigungszeichen angebracht wird: alsdann sieht die Gleichung $5x^3 . a^2 = 24 . 35$ so aus: das Zahlzäpfchen in

e

5, x in 3 desselbigen Viereckes, das Vervielfältigungszeichen steht im Seitenloche, darauf

fol-

folget a in 2 im zweiten Vierecke. Der Theiler c steht in 1 in dem Vierecke darunter, woneben im = Loche ein Zahlzäpfchen steht, um anzuzeigen, daß dieser Bruch nicht über dieses Viereck hinaus geht. Zwischen 24 und 25 wird das Vervielfältigungszäpfchen eben so angebracht.

Ein Muster für Wurzelgrößen sei $\sqrt[3]{b^2}$. Ein Zahlzäpfchen im Kreuzloche der Einschnitte zeigt das Wurzelzeichen an. In dem Vierecke, dem Wurzelzeichen zur Linken, oben steht 3 in 3, und in dem Vierecke, dem Wurzelzeichen zur Rechten unterwärts steht b in 2.

$b^{2:3}$ wird ausgedrücket, wenn b in 2, und das Vervielfältigungszeichen in 3 steht.

Steht x im +, und ein Zahlzäpfchen in 2 im nächsten Vierecke zur Rechten: so heist das $+x^{-2}$. Steht aber x in —: so bedeutet das $-x^{-2}$.

Ohne viel Nachsinnen wird man begreifen können, daß die Tafeln bei Ausarbeitung einer

Glei-

Gleichung Vortheile angeben, die man auf dem Papire nicht hat. Man versezet nur die Zeichen: so hat man schon eine andere Gleichung, die man erst auf dem Papire von neuem schreiben muß. Diese und andere Vortheile mehr lassen sich aber besser auf der Tafel vorzeigen, als beschreiben. Die Uebung wird auch Gelegenheit geben, noch andere zu entdecken.

Geometrie.

Aus der Algebra giengen wir in die Meßkunst über. Hier gab es schon mehr Mühe. Auf der Tafel konnten wir zwar, nach dem Beispiele Saundersons, die Figuren mit einer Schnure zeichnen, welches Verfahren noch brauchbarer wurde, da wir die verschiedenen Buchstaben hatten. Allein für einen Anfänger wollten diese Hilfsmittel doch nicht zureichen. Aus Holz und Pappedeckel geschnizelte Figuren ersezten diesen Mangel so lang, bis ich auf ein bequemeres verfiel, welches ein geschmeidiger Eisendrat war. Ich nahm eine mittelmäsige Pap-

pe (Pappedeckel); zeichnete darauf die Figuren und überzog dieselben mit diesem Drate. Der Drat wird zuvor gehörig zubereitet, zu diesem Ende wird er ausgeglüet, und hernach gesäubert. Um den Drat gehörig zu strecken, fasset man denselben an beiden Enden, und zieht ihn stark um ein Holz oder Stuhlbein etlichmal hin und her. Mit diesem Drate werden die Figuren gemacht. Wo die Linien auf dem Pappendek-kel ein Ende haben, da sticht man mit einem kleinen Pfriemen Löcher ein; mißt den Drat nach der Länge der gezeichneten Linien ab. Man muß aber den Drat um so viel länger nehmen, als nothwendig ist, denselben zu befestigen. Mit einer Dratzange bieget man den Ueberschuß bei-derseits in einen rechten Winkel zurück, stecket beide Ende durch die gestochenen Löcher, drücket dieselben auf die Pappe an, und schlägt mit ei-nem kleinen Hammer die hervorstehenden Spizen hinein. Wo sich die Linien kreuzen, da kann man auch den Drat sich kreuzen lassen. Weil aber die Figur dadurch zu erhaben wird: so thut

man

man am besten, wenn man eine Kreuzlinie in Stücken angesezet; auf solche Art wird die Figur schön eben, und bekömmt eine dauerhafte Festigkeit. Die Kreisfiguren lassen sich bei nahe eben so richtig machen, als mit der Feder; diese müssen aber stückweise angesezet werden, weil man sie nicht strecken kann.

Die Buchstaben zu diesen Figuren werden von demselbigen Drate gemacht, und haben die Gestalt der lateinischen Schrift, welche wie die Figuren befestiget werden. Hier muß man aber zuvor ein abc von Dratbuchstaben auf ein besonder Stück Pappe sezen, damit der Blinde diese Buchstaben auswendig lerne. Eine so verfertigte Tafel sieht wegen der Schwärze des Drates aus, als wäre dieselbe mit der Feder gezeichnet.

Hier ist wohl zu merken, daß man die Figuren nicht zu groß mache. Je gröser dieselben werden, desto mehr Zeit gehört dazu, sie zu überfühlen. Sie dörfen aber auch nicht zu klein sein. Die Erfahrung muß das rechte Mas an-

geben. Jede Pappe wird in zwei längliche Tafeln geschnitten, die auf dem Rücken zusammen geleimt, und in ein Buch gebunden werden. H. Weisenburg hat so ein Buch von 4 Blättern, worin die Figuren von der Geometrie und Trigonometrie verzeichnet sind.

Da nun auf solche Art alle mögliche Figuren, die sich mit der Feder zeichnen lassen, auch in Drate verzeichnet werden können: so ist offenbar, daß dadurch der Weg zu allen Theilen der Mathematik den Blinden gebahnet ist. Wie aber der Einbildungskraft der Sehenden durch körperliche Figuren zuweilen geholfen werden muß, so habe ich mich dieses Vortheils bedienet, und die Begriffe desto deutlicher gemacht, welches besonders in der Körpermeßkunst, in den Kegelschnitten und der Mechanik geschehen ist, und beinahe nothwendig war. Durch diese Mittel hat Hr. W. sich mehr Kenntniß im Sehen, und andern Wissenschaften in dem Stande der Blindheit erworben, als mancher Sehende, indem er die Optik, Katoptrik, Dioptrik,

trik, Mechanik, Hidraulik, Hidrostatik und Aerometrie aus den wolfischen Anfangsgründen erlernet hat. Die Geometrie und Trigonometrie hat er schon mit der Rechenkunst und Algebra vortheilhaft gelehret. Zu Speier hat er noch das Vergnügen gehabt einen blinden Knaben von 9 Jahren, der auf eine ähnliche Art mit ihm das Gesicht verlohren hatte, die 4 Rechnungsarten in Zeit von 3 Monaten beigebracht. Auf solche Weise ist ein beinahe unnüzes Glied der menschlichen Gesellschaft brauchbar gemacht worden.

Auf der Kugel und den Landkarten hat er sich nicht weniger umgesehen. Die Lage eines jeden Landes, und die vornehmsten Städte zeigt er mit solcher Fertigkeit, daß diese Kenntniß vor allen andern Wissenschaften die größte Bewunderung verursachet, indem man sich kaum vorstellen kann, wie es einem Blinden möglich ist, die Oerter aufzusuchen. Die Verwunderung fällt aber weg, wenn man seine Landkarten einsieht. Diese sind gemeine homannische

Karten, die für ihn eine besondere Zubereitung bekommen haben. Jede Karte ist auf Leinwand geleimet. Die Gränzen der Länder sind mit einer seidnen Schnur überzogen und benehet. Die seidne Schnur macht sich Hr. W. selbst. Die Flüsse werden mit einem aufgenecheten geschmeidigen Drate angezeiget, der nach der Krümme derselben gebogen ist. Die Städte sind mit Nadelköpfen bemerket, die man bei dem Nadelmacher von allerhand Gröse bekommen kann. Das feste Land wird von dem Gewässer durch folgende Zubereitung unterschieden. Das Gewässer wird einen Finger breit, am Ufer mit Leimwasser überstrichen, und alsbald mit grobem Sande überstreuet. Wenn alles trocken ist: so wird der übrige Sand hinweggeschaffet. Die kleinen Inseln sind mit großen oder kleinen Flenderchen (Flinderlein) angezeiget worden. Diese Karten werden auf dem Rücken mit Papir überzogen, damit das Genehte bedecket werde, und in ein Buch zusammengebunden. Hr. W. hat ein Buch von 6 Karten, nämlich die

Halb=

Halbkugeln, Europa, Asia, Afrika, Amerika und Deutschland. Diese durchwandert er mit seinen Fingern in den wärmsten Empfinduugen der Dankbarkeit gegen die wohlthätigen Hände, welche seine Karten begränzet haben. Wenig Mühe hat er auf Erlernung derselben verwandt, und dennoch hat er dieselben so genau inne, daß er auch im stande ist auf jeder Landkarte von Europa jedes Land mit seinen Fingern zu zeigen. Die Landkarten werden durch diese Zubereitung nicht verdorben. Sehende und Blinde können sie eben gut brauchen, ja bei erstern machen sie wegen ihrer merklichen Bezeichnung einen deutlichen und dauerhaften Eindruck.

Endlich verdienet angemerkt zu werden, daß Hr. W. mit Karten zu spielen weis, und dieses zwar mit einer Fertigkeit, die man bei einem Blinden nicht suchen sollte. Jeder Zuschauer muß sich verwundern, wenn er einen Blinden, seiner Meinung nach, die Farben fühlen sieht. Allein die Farben nuzen ihm gar nichts. Wie fein sein Gefühl ist: so hat es doch die Feinig-

keit nicht, die Farben zu unterscheiden. Wahr ist es, daß die verschiedenen Farben die Flächen der gefärbten Körper verschiedentlich verändern. Allein die Abstufungen dieser Verschiedenheiten sind so fein, so unmerkbar, daß dieselben dem Gesichte entgehen, um wie viel mehr dem Gefühle, und nur durch das verschiedene Einfallen der Lichtstralen merklich werden. Diesem zufolge hatte er andere Zeichen nothwendig, die Karten ihrer Farbe und Figur nach, voneinander zu unterscheiden, und diese sind Löcher, welche er mit einer feinen Stecknadel machet. Das ganze Spiel besteht aus 32 Karten, und ihre Bezeichnung geschieht nur in dem rechten Oberecke, wo die Löcher aufrecht, quer und schief, weit und enge eingestochen werden. Damit aber diese Löcher einmal, wie das andermal gemacht werden können: so hat er ein kleines Kupferblech, worin 18 kleine Löcher, drei und drei in einer Reihe geboret sind, welche Erfindung aus den Rechentafeln gekommen ist.

Inhalt.

1 §. Erklärung der Algebra. Seite 1
2 §. Bedeutung der Zeichen. 2
5 §. Bejate und verneinte Grösen. 3
10 §. Vielgliedrige Grösen zusammenzählen. 5
12 §. Vielgliedrige Grösen abziehen. 6
13 und 17 §. Gründe der Zeichenänderung bei dem Abziehen. 7 u. 9
20 §. Bejate und verneinte Grösen durcheinander vervielfältigen. 10
21 §. Vielgliedrige Grösen wirklich vervielfältigen. 12
22 §. Die Zeichenänderung beim Theilen. 13
23 §. Rechnung mit Buchstaben. 15
38 §. Rechnungsarten in Würden, und Wurzeln. 24
68 §. Anwendung der Rechnung mit Zeichen und Buchstaben 40
99 §. Von den Gleichungen und ihren Auflösungen. 61
122 §. Aufgaben mit einer Unbekannten. 76
141 §. Aufgaben mit zwei Unbekannten. 96
155 §. Aufgaben mit mehr Unbekannten. 114
160 §. Gleichungen, worin die Unbekannte eine Würde ist. 126

164 §. Aufgaben mit einer Unbekannten in Würden. 128

173 §. Von den vermischten Vierecksgleichungen. 138

185 §. Aufgaben in vermischten Vierecksgleichungen. 148

205 §. Aufgaben in Buchstaben. 173

226 §. Die Zinsrechungen. 192

237 §. Von den unbestimmten Aufgaben. 209

259 §. Von Gleichungen in höhern Würden. 235

264 §. Eine zweigliedrige Wurzel zu jeder Würde ohne Mühe erheben. 239

268 §. Von den Wurzeln der Gleichungen. 242

279 §. Wie man die Werthe der Unbekannten findet. 246

285 §. Aufgaben in höhern Würden. 255

Druckfehler.

5 Seite	3 Zeile von unten	statt 23	lies — 23.
14	3	— 12	† 12
17	2	a†b	a†x
18	6	bx	2 bx
22	9	aa in a	a in aa
24	12	statt des lezten aaa	aaaa
84	2	x 8 — 2	x ? — 2
94	6	3†1120	3x † 1120
95	16	3313x	3312x
97	3	12x — 2y	12†2y
120	16	15c	15a

Algebra.

Von den Rechnungs-Arten mit Zeichen.

§. 1.

Die Algebra ist eine Wissenschaft, unbekannte Größen, aus angegebenen Eigenschaften derselben, auf eine allgemeine Art zu finden.

Die Rechenkunst, oder die Zahlenkunst, beschäftiget sich mit den Zahlen, und ihren Rechnungsarten, in so ferne dieselben im gemeinen Le-

ben vorkommen, die Algebra hat ein weiteres Feld. Sie berechnet die Größen auf eine allgemeine Art, gibt allgemeine Regeln an, zu unbekannten zu gelangen. Sie wird deswegen auch die **allgemeine Rechenkunst** genennet.

2. §. Da alle Veränderungen der Größen in ihrer Vermehrung und Verminderung bestehen: so muß die Algebra dieselben auf eine allgemeine Art anzeigen. Zu diesem Ende bedienet sie sich zu ihren Rechnungsarten allgemeine Zeichen, und ihre Berechnungen geben allgemeine Muster ab, welche deswegen **algebraische Ausdrücke, Formeln** genennet werden.

Wie die Rechnungsarten mit Zeichen ausgedrücket werden, ist schon in der Rechenkunst an gehörigen Orten gezeiget worden.

$6 + 3$ bedeutet die Summe von 6 und 3, die wirkliche Summe ist es noch nicht; es sind nur die Theile derselben angegeben.

$8 - 5$ bedeutet den Unterschied zwischen 8 und 5; von 8 soll 5 abgezogen werden, wirklich ist noch nicht abgezogen worden.

Der Inhalt von 6 und 4 wird durch $6 . 4$, oder 6×4 angezeiget. Es ist der Inhalt wirklich nicht; er soll erst daraus gemacht werden. Die Bestandtheile davon sind nur angegeben.

$\frac{6}{3}$ oder $6 : 3$ bedeutet den Antheil, welcher entsteht, wenn 6 mit 3 getheilet wird. Der Antheil

ist

ist wirklich noch nicht da; es ist nicht wirklich getheilet worden.

3. §. Die Anzeige der Rechnungsarten zeiget demnach an, woraus Summe, Unterschied, Inhalt und Antheil bestehen; sie legt die Grundstücke derselben vor, woraus nicht geringe Vortheile entspringen, wie man weiter sehen wird.

4. §. Bei den Zeichen + und — ist wohl zumerken, daß dieselben nur die Zahl angehen, vor welcher sie stehen. So gehöret in 6 — 3 das Zeichen — nicht zu 6, sondern zu 3. Vor der Zahl, welche von Anfange kein Zeichen bei sich hat, gilt das Zeichen +. Verändern diese Zahlen aber ihre Ordnung: so nimmt 6 ihr Zeichen wieder an, als: — 3 + 6, welches eben so viel ist als 6 — 3, oder + 6 — 3. Die Stellen geben hier den Zahlen keine besondere Ordnung.

5. §. Zusammenzählen und abziehen sind entgegengesezte Rechnungsarten: deswegen nennet man die Größen, die diese Zeichen haben, entgegengesezte oder widrige Größen als, + 6 — 3. Die Größe oder Zahl, welche + vor sich hat, heißt die **bejate**, (positive); welche — vor sich hat, wird die **verneinte** (negative) genennet.

Kraft dieses Gegensazes muß die verneinte Größe die bejate mindern. In 6 — 3 vermindert die verneinte — 3, die bejate 6, um 3. In 4 — 7

vermindert aber die bejate 4, die verneinte — 7 um 4. Sind beide eben groß: so hebet eine die andere auf, als 5 — 5.

6. §. Die verneinte Größe hat demnach eine Beziehung auf eine bejate, welche machet daß man auf zwei Sachen denken muß, nämlich auf ihre Größe, oder Einser, und auf das Entgegengesetzte, auf das, was vermindert werden soll. So zeiget — 3 in dem Ausdrucke 6 — 3 nicht allein an, daß 3 Einser da stehen; sondern das Zeichen — weiset auch noch auf eine Verminderung einer andern Zahl zurück, nämlich daß hier 6 um 3 zu vermindern sei. Steht nun die verneinte ganz allein: so bleibt der Begriff der verminderung, und man denket sich eine bejate Zahl dazu. So denket man bei — 8, daß eine gewisse Zahl um 8 zu vermindern sei.

7. §. Diese Beziehung lasse man nicht aus der Acht; sie machet in den bejaten eine große Veränderung. Auf eine, weniger allgemeine Art, kann man bejate und verneinte Größen, als Vermögen und Schuldeu, Einnahme und Ausgabe, Auf- und Absteigen u. s. w. ansehen. Die Zahlen mit +, können Vermögen, und die mit —, Schulden anzeigen. u. s. w.

8. §. Man kann nicht sagen, daß verneinte Größen schlechthin nichts sind. Sie sind etwas,

aber

aber nicht das bejate. Die Ausgabe ist gewiß etwas, aber sie ist nicht Einnahme. Es wäre schlechthin nichts da, wenn keine Einnahme noch Ausgabe da wäre. Demnach kann man sich eine Ordnung denken, z. B. vorne wäre Vermögen, hinten Schulden, in der Mitte nichts. Vermögen wäre etwas, und Nichts wäre Nichts, Schulden wären weniger als Nichts. Denn, wer zu Schulden kömmt, muß zuvor zu Nichts kommen.

9. §. Mehrere Größen, die mit + und — zusammengesetzet werden, nennet man **vielgliedrige Größen**, z. B. 4 + 3, 7 — 4, 6 + 3 — 2 u. s. w.

10. §. **Vielgliedrige Größen zusammenzählen.**

Gleichartige werden untereinander geschrieben, das ist, bejate unter bejate, verneinte unter verneinte, und in eine Summe zusammen gezogen, wie in der gemeinen Rechenkunst.

I.	II.	III.	IV.
6 — 3	14 — 8	—16 + 2	7 — 2
5 — 4	7 — 9	— 7 + 4	— 3
2 — 6	24 — 1	+ 8	7 — 5
13 — 13	— 6	—23 + 14	
	45 — 24		

In dem ersten Muster wären die bejaten und verneinten Zahlen, oder Einnahme und Ausga-

be gleich groß; in dem zweiten ist die Einnahme grösser; in dem dritten ist die Einnahme kleiner; in dem letzten ist die Ausgabe größer.

11. §. Werden verneinte Größen zu verneinten gezählet: so wird die Summe davon größer, und die bejaten müssen dabey verlieren; weil die verneinten die bejaten immer vermindern (5. §.). So wird ein Schuldner um 20 Gulden ärmer: wenn sich seine Schulden um 20 fl. vermehren. Eben so arm wird er werden, wenn er von seinem Vermögen 20 Gulden hergibt, und die vorigen Schulden behält. Man kann deswegen die Zusammenziehung in eine Abziehung der entgegengesetzten Größen verwandeln; diese Abziehung muß aber über das Kreutz, oder in entgegengesetzten Größen geschehen. Eben dieses gilt auch für die bejaten Z. B. die Summe von 8 — 4 und

$$\begin{array}{r} 8-4 \\ 3-2 \\ \hline 11-6 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{r} 8-4 \\ 3-2 \\ \hline 6-1 \end{array}\right\}$$

3 — 2 ist nach der Regel 11 — 6. Zieht man aber 2 von 8, und 3 von 4 ab: so entsteht 6 — 1, welches eben so viel gibt, als 11 — 6, beides machet 5.

12. §. **Vielgliedrige Größen abziehen.**

Gleich-

Gleichartige werden untereinander geschrieben, und bejate von bejaten, verneinte von verneinten abgezogen.

7—4	
3—2	Abzug.
4—2	Ueberschuß.

13. §. Weil verneinte von verneinten, oder Ausgabe von Ausgabe abgezogen wird: so muß man bei dem Abzuge der verneinten Größen immer gewinnen. Denn je geringer die Ausgabe ist, desto reicher bleibt man. So wird ein Einnehmer um 2 Gulden reicher werden, wenn ihm die Ausgabe von 2 Gulden abgenommen wird. Er würde eben so reich sein, wenn er bei derselbigen Ausgabe noch 2 Gulden einnähme. Demnach kann man die Abziehung der verneinten Größen in eine Zusammenziehung der entgegengesetzten Größen verwandeln. Z. B. von 7—4 soll —3 abgezogen werden. Nach der allgemeinen Regel wird —3 von —4 abgezogen, und der Ueberschuß ist 7—1. Zählet man aber —3 zu 7: so entstehet 10—4, welches eben so viel als 7—1; beides machet 6 aus.

7—4	oder	7—4
—3		—3
7—1		10—4

14. §. Eben so kann man bey Abziehung der bejaten Größen die Abziehung in eine Zusammen-

ziehung verwandeln. Z. B. von 7 — 2 solle + 3 abgezogen werden. Nach der Regel wird 3 von 7

7—2	oder	7—2
3		3
4—2		7—5

abgezogen, und 4—2 ist der Ueberschuß. Zählet man aber 3 zu —2: so gibt das 7—5, das eben so groß ist, als 4—2.

15. §. Es gibt Fälle, wo man die Abziehung anders nicht, als durch die Zusammenziehung machen kann, nämlich wenn keine gleichartige Zahlen da sind. Z. B. von + 6 soll — 4 abgezogen werden, dieses gibt + 10. Desgleichen soll + 4 von — 6 abgezogen werden; es gibt — 10. Eben dieses Mittels bedienet man sich: wenn der Abzug zu groß ist. Z. B. von 4 — 2 soll 6 — 5

4—2
6—5
9—8

abgezogen werden: so wird dieses 9—8 geben.

16. §. Soll die Abziehung nicht wirklich, sondern blos in Zeichen geschehen: so müssen die bejaten und verneinten Größen ihre Zeichen verändern, nämlich + in —, und — in +, und neben einander geschrieben werden. So wird 6—5 von 4—2 abgezogen angezeiget: wenn man schreibt 4—2—6+5.

17. §. Daher hat man für die Abziehung diese Regel genommen: **Der Abzug wird mit veränderten Zeichen zu der Abziehungs-Größe geschrieben, und was einerlei Zeichen hat, zusammengezogen.**

Z. B.	24 — 15	
	8 — 4	Abzug.
	— +	Zeichen geändert.
	28 — 23	Ueberschuß.

18. §. Da bejate und verneinte Größen, vermöge ihres Zeichens, den Begriff der Zusammenziehung und Abziehung immer mit sich führen: so muß man von jeder Größe die Summe nehmen, wenn man dieselbe nach einer bejaten nehmen soll. Hingegen muß man ihren Unterschied, oder dieselbe im Abzuge nehmen, oder man soll sie sovielmal abziehen: wenn dieselbe nach Vorschrift einer verneinten Größe genommen wird.

19. §. Eine Zahl oder Größe etlichmal nehmen, etlichmal zu sich selbst zählen, heißt **vervielfältigen** (29. §. Rech.). Wie vielmal eine Zahl genommen, oder zu sich gezählet werden soll, gibt eine andere Zahl, der Vervielfältiger an. Daher muß die Vervieltfältigungszahl sich immer nach dem Vervielfältiger richten; sie muß nach Anweisung desselben genommen werden. Mit be-

jaten Zahlen vervielfältigen, kann also nichts anders sagen, als die Summe einer andern Zahl nehmen, mit verneinten aber vervielfältigen, heist die Zahl so vielmal abziehen, die Zahl verneint, im Gegensatze, Abzuge nehmen.

20. §. Bejate und verneinte Größen vervielfältigen.

Die Zahlen werden, wie gewöhnlich, miteinander vervielfältiget, und der Inhalt behält das Zeichen der vervielfältigten Zahl, wenn der Vervielfältiger bejat ist. Hingegen verändert der Inhalt seine Zeichen, wenn der Vervielfältiger verneint ist. Z. B.

$$\begin{array}{r} +4 \\ +3 \\ \hline +12 \end{array}$$

Denn $+4$ soll nach Anweisung seines Vervielfältigers $+3$, dreimal, oder $+4$, $+4$, $+4$ soll in einer Summe genommen werden; diese Summe ist aber $+12$, weil die Summe bejat ist, sobald es ihre Theile sind.

$$\begin{array}{r} -4 \\ +3 \\ \hline -12 \end{array}$$

-4 soll nach Anweisung seines Vervielfältigers dreimal, oder -4, -4, -4 soll in eine Summe

me gebracht werden; diese Summe ist —12 (10. §.), weil die Summe verneint ist, so bald es ihre Theile sind.

$$\begin{array}{r} +4 \\ -3 \\ \hline -12 \end{array}$$

+4 soll nach Anweisung seines Vervielfältigers dreimal abgezogen, dreimal verneint, oder —4, —4, —4 genommen werden (17. §.). Das gibt aber —12.

$$\begin{array}{r} -4 \\ -3 \\ \hline +12 \end{array}$$

Aus gleichem Grunde, weil es der verneinte Vervielfältiger so haben will, muß —4 dreimal abgezogen werden, die Abziehung verändert aber das Zeichen (17. §.). Man nimmt demnach +4, +4, +4, oder +12.

Ueberhaupt kann man die Regel von den Zeichen folgender Gestalt ausdrücken:

+ mit + gibt +, — mit — gibt +; und + mit — gibt —.

— mit + gibt —

21. §. Vielgliedrige Größen wirklich miteinander vervielfältigen.

Man vervielfältiget die Vervielfältigungszahl mit jedem Vervielfältiger besonders durch, schreibt gleichartige Zahlen unter einander, und zieht sie in eine Summe, wie in der gemeinen Rechenkunst. Man kann aber anfangen, wo man will; weil bey Zeichen die Ordnung keinen besondern Werth gibt. Z. B. der Inhalt von +6 und +5 ist +30. Der Inhalt von +5 und —4 ist —20, dieses kömmt unter — zu stehen. Der Inhalt von +6 und —3 ist —18, und kömmt unter — zu stehen. Der Inhalt von —3 und —4 ist +12, der kömmt unter + zu stehen. Alle diese Zahlen werden zusammen gezogen, und der ganze Inhalt ist 42—38.

6	— 4
5	— 3
30	—20
12	—18
42	—38

Es ist auch erlaubet jeden Inhalt besonders zu schreiben, ohne auf die Gleichartigkeit acht zu geben.

I.
$$\begin{array}{r} 6-4 \\ 5-3 \\ \hline 30-20-18+12 \end{array}$$

II.
$$\begin{array}{r} 6-4 \\ 5+3 \\ \hline 30-20+18-12 \end{array}$$

III.
$$\begin{array}{r} 6+4 \\ 5+3 \\ \hline 30+20+18+12 \end{array}$$

IV.
$$\begin{array}{r} 6-4 \\ 5-3 \\ \hline 5.6-4.5-3.6+3.4 \end{array}$$

22. §. Bei wirklicher Theilung bejater und verneinter Zahlen machen sich die Zeichen, wie bei der Vervielfältigung.

$+12$ mit $+3$ gibt $+4$.

Denn durch die Theilung bringt man den zweiten Vervielfältiger heraus. Ist einer davon bejat: so muß es der andere auch sein, weil zwei bejate auch einen bejaten Inhalt geben.

-12 mit $+3$ gibt -4.

Die

Die Theilung bringt den zweiten Vervielfältiger heraus. — 12 entsteht aus einem bejaten und verneinten; da nun der Theiler bejat ist: so muß der verneinte heraus kommen.

— 12 mit — 3 gibt + 4.

— 12 ist der Inhalt von einer bejaten und verneinten Zahl. Ist nun der Theiler die verneinte: so muß die bejate herauskommen.

+ 12 mit — 3 gibt — 4.

— 12 ist der Inhalt von zwei verneinten Zahlen. Der Theiler ist eine verneinte: so muß die andere verneinte auch herauskommen.

Die

Die Rechnung mit Buchstaben.

23. §. An statt der Zahlen ist es erlaubet Buchstaben zu brauchen. Z. B. a, b, c, u. s. w. können allerlei Zahlen bedeuten, mit welchen man auch rechnen kann. Da man aber den Buchstaben die Einser wie den Zahlen nicht ansieht: so kann man die Rechnungsarten anders nicht als in Zeichen machen. Sie haben demnach eben die Regeln, wie die Zahlen.

24. §. Zuweilen sind in einem Ausdrucke Zahlen und Buchstaben, als $a+4$, $x-8$ u. s. w. Die Buchstaben nehmen auch Zahlen vor sich. Z. B. $4a$, $12y$ u. s. w. Diese vor dem Buchstaben geschriebene Zahl nennet man **Zähler**, oder **Mitzähler**, (Coefficiens); sie zeiget nämlich, daß der Buchstab so vielmal genommen wird, oder die Summe von so viel Buchstaben.

25. §. **In Buchstaben zusammenzählen.**

Einerlei Buchstaben werden untereinander geschrieben, und wenn sie einerlei Zeichen haben, zusammengezählet. Sind aber die Zeichen verschieden: so zieht man sie von einander ab.

I. $4a+46b-c$	II. $12x+24$
$3a-30b+5c$ Zusatz.	$x-12$ Zusatz.
$7a+16b+4c$	$13x+12$

26. §. In Buchstaben Abziehen.

Einerlei Buchstaben werden untereinander geschrieben, und wenn sie einerlei Zeichen haben: so werden sie voneinander abgezogen: sind aber die Zeichen verschieden: so werden sie zusammengezählet; die Summe behält aber das Zeichen der Buchstaben, wovon abgezogen wird.

$$\begin{array}{lr} \text{I.} & 7a+16b+6c \\ \text{Abzug.} & 3a-30b+5c \\ \hline & 4a+46b+c \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{II.}\ 13x+12 & \\ x-12 & \text{Abzug.} \\ \hline 12x+24 & \end{array}$$

27. §. Ist aber der Abzug zu groß: so ziehet man das Obere von dem Untern ab, und gibt dem Ueberschusse das entgegengesezte Zeichen.

$$\begin{array}{r} 13x+12 \\ x+18 \\ \hline 12x-6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5x-6a+3y \\ 8x-10a+12y \\ \hline -3x+4a-9y \end{array}$$

28. §. Man kann auch die Abziehung blos anzeigen: wenn man die Zeichen des Abzuges ändert, welches bei verschiedenen Buchstaben geschehen muß.

$$\begin{array}{lr} \text{I.} & ab-c \\ & -5a+d \\ \hline & ab-c+5a-d \end{array} \qquad \begin{array}{lr} \text{II.} & 5x+7 \\ & y+d-xy \\ \hline & 5x+7-y-d+xy \end{array}$$

29. §. In Buchstaben wird die Vervielfältigung angezeiget, wie in Zahlen: ax, $a.x$, $a \times b$ bedeuten den Inhalt von a und x, und axy den Inhalt von a, x, y; $(a+x).(b-c)$, $\overline{a+x}.\overline{b-c}$ bedeuten den Inhalt von $a+x$ und $b-c$.

30. §. Vielgliedrige buchstäbliche Größen wirklich miteinander vervielfältigen.

Man vervielfältiget jedes Glied mit jedem Gliede des Vervielfältigers, und beobachtet dabei die Regeln von den Zeichen (20 §.). Hier

$$\left.\begin{array}{l} a+x \\ b-c \\ \hline ab+bx-ac-cx \end{array}\right\}$$

werden a und x mit b und darauf mit $-c$ vervielfältiget, wie in Zahlen.

31. §. Kömmt ein Inhalt von einerlei und eben viel Buchstaben heraus: so schreibt man diese untereinander, und zieht sie ab, oder zusammen, nachdem die Zeichen gleich oder ungleich sind.

I.

$$\begin{array}{llllll}
aa & +ab & -ax & & & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & a+b-x & & & & \\
 & a+b-x & & & & \\
\hline
aa & +ab & -ax & & & \\
 & +ab & & +bb & -bx & \\
 & & -ax & & -bx & +xx \\
\hline
aa & +2ab & -2ax & +bb & -2bx & +xx
\end{array}$$

II.

$$\begin{array}{rrr}
 & a+b & \\
 & a+b & \\
\hline
aa & +ab & \\
 & +ab & +bb \\
\hline
aa & +2ab & +bb
\end{array}$$

III.

$$\begin{array}{rrr}
 & a+b & \\
 & a-b & \\
\hline
aa & +ab & \\
 & -ab & -bb \\
\hline
aa & - & bb
\end{array}$$

IV.

$$\begin{array}{rrr}
 & a-b & \\
 & a-b & \\
\hline
aa & -ab & \\
 & -ab & +bb \\
\hline
aa & -2ab & +bb
\end{array}$$

Dieses sind vortheilhafte Abkürzungen, wozu man aber nicht gezwungen ist.

32. §.

32. §. Die Theilung zeiget man in Buchstaben an, wie in Zahlen Z. B. $\frac{a}{b}$, a: b; das heist: a wird mit b getheilet.

$\frac{ax—bc}{bx}$, $\frac{ax}{bx}$ — $\frac{bc}{bx}$; xa—bc wird mit bx getheilet; das sind auch buchstäbliche Brüche.

33. §. Buchstäbliche Größen mit einem einfachen Theiler wirklich theilen.

Aus den Theilungsgrößen und dem Theiler streichet man den Theiler hinweg, und beobachtet die Regel der Zeichen Z. B:

$$\frac{3ax}{a} = 3x,\ \frac{ax—bc}{bx} = \frac{ax}{bx} — \frac{bc}{bx} = \frac{a}{b} — \frac{c}{x}$$

Denn durch die Theilung wird wieder aufgelöset, was durch die Vervielfältigung zusammen gekommen ist. Man findet deswegen die Größe, womit eine andere vervielfältiget ist; diese steht aber neben der andern. Demnach kann man die andere mit dem Theiler nur hinwegstreichen.

34. §. Wäre aber der Theiler so groß, als die Theilungszahl: so streicht man letztere zwar aus: setzet aber an ihre Stelle 1 hin Z. B. $\frac{a}{a}$ gibt 1, $\frac{ax}{ax}$ gibt 1. Denn jede Zahl oder

Größe kann als ein Inhalt von 1 und ihr selbst angesehen werden, und darum ist auch a eben so viel als 1a, ax eben so viel als 1ax.

Man könnte auch, wie bei Zahlen fragen: wie oft ist a in a: wie oft kann ax von ax abgezogen werden? so würde man sagen müssen: 1mal. Wie oft demnach die Theilungszahl ganz hinweggestrichen wird: eben so oft muß man dafür 1 hinschreiben, als:

$$\frac{x}{x}=1, \quad \frac{a}{aa}=\frac{1}{a}, \quad \frac{abx-bx}{bx}=\frac{abx-bx}{bx} \text{ gibt } a-1$$

35. §. Es ist gesagt worden: wenn die ganze Theilungsgröße hinweggestrichen wird, so wird 1. dafür hingeschrieben. Hat aber die Theilungsgröße Mitzähler bei sich: so werden diese nach ihrer Art getheilet, nämlich

$$\frac{3ax}{3ax}=1, \quad \frac{3ax}{a}=3x, \quad \frac{12bd}{4bd}=3, \quad \frac{12bd}{3}=4bd.$$

Sind aber die Mitzähler in ihren Theilern ausgedrücket: so streichet man mit gleichen Buchstaben gleiche Zahlen aus, als:

$$\frac{3.\,4ax}{4ax}=3, \quad \frac{3.\,6y}{3}=6y.$$

Betrachtet man das ganze Verfahren in der Theilung: so ergibt sich, daß man durch die Theilung

lung diejenige Zahl oder Größe findet, mit welcher eine andere vervielfältiget worden ist. So wird durch $\frac{3.\ 4ax}{4ax}$ gefunden womit 3 vervielfältiget worden ist, um den Inhalt 3. 4ax heraus zu bringen. Eben dasselbige bedeutet $\frac{ab+bb.}{a+b}$ Da aber der Theiler schon ein Vervielfältiger ist: so merket man den andern in ab+bb daran, daß in jedem Gliede ein jedes Glied des Theilers damit vervielfältiget ist, nämlich a+b ist mit b vervielfältiget.

36. §. **Vielgliedrige Größen in Buchstaben mit vielgliedrigen wirklich theilen.**

1) Man ordnet sich die Glieder der Theilungszahl nach dem ersten Gliede des Theilers so, daß die Glieder vorne stehen, welche die Buchstaben des Theilers enthalten.

2) Darauf nimmt man so viel Glieder vor, als der Theiler hat, und theilet dieselben, wie sonst in Zahlen gewöhnlich ist. Man vergesse aber die Regeln von den Zeichen nicht.

Z. B. Es soll aa + 2ab + bb mit a + b getheilet werden. Darin sind die Glieder nach a eingerichtet. Nun nehme man die zwei Glieder aa + 2ab vor, und bedenke, daß a in aa soviel-

	a + b Theiler.
aa + 2ab + bb	a + b Antheil.
aa + ab	
+ ab + bb	
+ ab + bb	

mal sein müsse, als b in 2ab. Es ist aa in a, amal; b in 2ab, 2amal, folglich auch amal. Demnach ist a + b in aa + 2ab, amal. Der Antheil a wird zur Seite geschrieben, darauf wird der Theiler damit vervielfältiget. Der Inhalt davon ist aa + ab, welcher von aa + 2ab abgezogen wird, und noch ab übrig läßt.

Zu ab nehme man das folgende Glied bb, so ist ab + bb mit a + b zu theilen, und zwar so, daß a so vielmal in aa, als b in bb genommen werde. Jedes ist in seinem zugehörigen Gliede bmal. Dieser Antheil wird mit seinem Zeichen + zu dem andern geschrieben, darauf der ganze Theiler mit b vervielfältiget, der Inhalt ab + bb von ab + bb abgezogen, wovon nichts übrig bleibt.

37. §. Zuweilen geschieht es, daß Glieder bei der Vervielfältigung verschwinden, wenn sie nämlich widrige Zeichen haben. Z. B. der Inhalt von $a - b$ und $a + b$ ist $aa - ab + ab + bb$. Hier heben sich $- ab$ und $+ ab$, und es bleibt nur $aa - bb$. Würde nun $aa - bb$ mit $a + b$ getheilet: so wäre das zweite Glied für b nicht da. Das hindert aber die Theilung nicht. Man fange mit a an, und die Theilung wird doch vor sich gehen.

	$a + b$ Th.
$aa - bb$	$a - b$
$aa + ab$	
$- ab - bb$	
$- ab - bb$	

Hier könnte man fragen: warum $+ ab$ unter dem Striche in $- ab$ verwandelt ist? das kömmt daher weil $+ ab$ abgezogen werden soll: Da aber kein $+ ab$ vorräthig ist, wovon man es abziehen könnte, so muß $+ ab$ in $- ab$ verwandelt werden, um die Abziehung zu bemerken.

Die Rechnungsarten in Würden und Wurzeln.

38. §. Ein Inhalt, der aus der Vervielfältigung gleicher Größen entsteht, wird eine Würde genannt (Rech. 159 §). aa ist eine Würde, Potenz, Dignität; weil es der Inhalt von a und a ist.

Nach der Anzahl der Vervielfältiger wird die Würde bestimmt. Die unvervielfältigte Größe ist die erste Würde, der Inhalt von zwei Größen die zweite, der von drei Größen die dritte Würde u. s. w. als a, aa, aaa, aaa u. s. w.

2, 4, 8, 16

Diese Würden werden auch mit einer, oberwärts rechter Hand an die Wurzel geschriebene Ziffer vortheilhaft angezeiget, und diese Ziffer heist der **Würdezeiger**, als,

a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, u. s. w.
2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6,
ab. $(ab)^2$, $(ab)^3$, $(ab)^4$, oder:
ab, a^2b^2, a^3b^3,

39. §. Auf solche Art machen die Würden eine Staffelreihe aus, worin die Steigzahl so groß ist, als die Wurzel, welche das erste Glied ist. Aus dieser Reihe kann jede Würde mit sich selbst ver-

vervielfältiget werden. Es kann demnach jede Würde eine Wurzel seyn: so kann a^4 eben eine zweite Wurzel sein, wie a^2; 9 kann eine Wurzel sein wie 3.

40 §. Würden zusammen- und abziehen.

Gleichartige werden zusammen- und von einander abgezogen, wie andere Größen. Es ist aber zu merken, daß gleichartige Würden unter einerlei Würdezeiger auch einerlei Buchstaben haben müssen: so sind a^1, a^2, a^3 nicht gleichartig.

Zusammenziehung.

I. a
a^2 Zusaz.
$a + a^2$

II. $a^3 - a^2$
$a^5 + a^7$ Zusaz.
$a^3 - a^2 + a^5 + a^7$

III. $7x^5 - 8a^4$
$3x^5 - 4a^2$ Zusaz.
$10x^5 - 8a^4 - 4a^2$

IV. $3^2 - 4^3$
$3^2 + 5^3$ Zusaz.
$2.3^2 - 4^3 + 5^5$

Abziehung.

I. a
a^4 Abzug.
$a - a^4$

II. $5a^3 + b^5$
$3a^3 - c^6$ Abzug.
$2a^3 + b^5 + c^6$

Daraus erhellet, daß die ungleichartigen Würden nach der allgemeinen Regel in Zusammen- und Abtheilung behandelt werden. Eben so geht es mit den andern Rechnungsarten. Die Würden unter einerlei Buchstaben haben einen besondern Vortheil, wie folgendes zeiget.

41. §. Würden mit einander vervielfältigen.

Man nimmt die Summe der Würdezeiger, schreibt diese als Würdezeiger zu einer Größe: so hat man den Inhalt der Würde. Z. B.

$a^4 . a^5$ gibt a^9 oder a^{4+5}

$3^2 . 3^3$ gibt 3^5 oder 3^{2+3}

$4x^2 . 3x^2$ gibt $12x^{2+2}$ oder $12x^4$

$a^x . a^n$ gibt a^{x+n}

42. §. Sind die Buchstaben oder Zahlen verschieden: so wird die Vervielfältigung mit Zeichen bemerket, $a^4 b^5$, oder $a^4 b^5$, oder $a^4 \times b^5$. sind dreierlei Ausdrücke für den Inhalt von a^4 und b^5.

43. §. Daß aber eine Größe, deren Würdezeiger die Summe von zwei andern ist, den Inhalt die-

dieser beiden Würden vorstelle, läßt sich leicht einsehen. Denn der Würdezeiger zeiget die Zahl der Größen an, die miteinander vervielfältiget werden. Da nun durch die Vervielfältigung die Größen zusammen kommen, aber mehr nicht zusammen kommen, als in jeder Würde sind: so muß die Summe als Würdezeiger zu dem Inhalte geschrieben werden, wie man deutlich sieht, wenn man die Würden ohne Würdezeiger ganz ausschreibt. Z. B.

$$\begin{array}{rl} aaaa = a^4 & \quad 3.3 = 3^2 \\ aaaaa = a^5 & \quad 3.3.3 = 3^3 \\ \hline aaaaaaaaa = a^9 & \quad 3.3.3.3.3 = 3^5 \end{array}$$

44. §. Jede Würde läßt sich zum Vierecke machen: wenn man ihren Zeiger mit 2 vervielfältiget: so ist x^6 das Viereck von x^3. Denn x^3 muß mit x^3 vervielfältiget werden. Der Inhalt von x^3 und x^3 ist aber x^{3+3}. Die Summe zwei gleicher Zahlen ist aber so groß als der Inhalt von einer dieser Zahlen und von 2. Aus gleichem Grunde wird überhaupt jede Würde zu einer andern erhoben, wenn man die Würdezeiger mit dem andern, wozu sie erhoben werden soll, vervielfältiget. Z. B.

Das

Das Viereck von $a^1 = a^{1.2} = a^2$

von $a^2 = a^{2.2} = a^4$

von $a^n = a^{n.2} = a^{2n}$

Der Würfel von $a^1 = a^{1.3} = a^3$

von $a^2 = a^{2.3} = a^6$

von $a^n = a^{n.3} = a^{3n}$

45. §. **Würden miteinander theilen.**

Weil die Vervielfältigung der Würden durch die Zusammenziehung der Zeiger bewirket wird: so muß Kraft des Gegensazes, die Theilung durch die Abziehung geschehen. Man ziehe demnach die Zeiger von einander ab: so hat man getheilet. Z. B.

$\frac{a^9}{a^4} = a^{9-4} = a^5$ | $\frac{12x^4}{3x^2} = 4x^{4-2} = 4x^2$

Schreibt man an statt $\frac{a^9}{a^4} = \frac{aaaaaaaaa}{aaaa}$, und theilet wie gewöhnlich: so entsteht $aaaaa = a^5$.

7 — 2

gleich-

gleichfalls $\frac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5$

46. §. Die Wurzeln werden gefunden, wenn man den Würdezeiger mit dem Wurzelzeiger theilet.

Die Viereckswurzel von $a^1 = a^{1:2}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$

von $a^2 = a^{2:2} = a^1 = a$

von $a^3 = a^{3:2}$

Die Würfelwurzel von $a^1 = a^{1:3}$

von $a^2 = a^{2:3}$

von $a^3 = a^{3:3} = a^1 = a$

Die Wurzel n von der Würde $a^m = a^{m:n}$

47. §. Jede Würde hat so viel Wurzeln, als ihr Zeiger Einser hat. Denn die Wurzel ist eine von den gleichen Größen, woraus die Würde bestehet. Die Anzahl dieser gleichen Größen wird aber durch den Würdezeiger ausgedrücket. Weiß man nun eine Wurzel von einer Würde: so weiß man sie alle. Deswegen suchet man auch in Würden nur eine Wurzel. Sind die Wurzeln eines Inhaltes nicht gleich: so muß man dieselben alle besonders suchen, wie man unten sehen wird.

48. §. Demnach ist die Ausziehung der Wurzeln eine besondere Theilung.

49. §. Das gewöhnliche Wurzelzeichen ist sonst $\sqrt{}$, welches vor einer Würde steht. In die Oeffnung dieses Zeichens wird der Wurzelzeiger geschrieben. Z. B.

Viereckswurzel von $a^1 = a^{1:2} = \sqrt[2]{a}$

von $a^2 = a^{2:2} = \sqrt[2]{a^2} = a$

Würfelwurzel von $a^2 = a^{2:3} = \sqrt[3]{a^2}$,

von $\overset{3}{2} = 2^{3:3} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

n Wurzel von $a^m = a^{m:n} = \sqrt[n]{a^m}$

Das Wurzelzeichen ohne Zeiger bedeutet die Viereckswurzel.

50. §. Wenn die Würdezeiger mit dem Wurzelzeiger theilbar ist: so kann man die Wurzel ohne Zeichen ausdrücken, wie $\sqrt[2]{a^2} = a$, $\sqrt[3]{2^3} = 2$. Dergleichen Würden sind **Wurzelfähig** (rational), die andern heißen **Wurzellos** (irrational).

51. §. Wenn eine Wurzel aus einer zusammengesezten Würde gesuchet wird: so muß bei

jeden

jeden Zeiger die Theilung angezeiget werden. Z. B.

Die Viereckswurzel

von $a^4 b^6 = a^{4:2} b^{6:2} = a^2 b^3 = \sqrt{a^4 b^6}$

Die Würfelwurzel

von $a^3 b^6 = a^{3:3} b^{6:3} = a b^2 = \sqrt{a^3 b^6}$

52. §. Bei diesen trift es ein, daß ein oder anderer Würdezeiger untheilbar ist. Dergleichen ist $a^2 b^3$, wovon die Viereckswurzel $\sqrt[2]{a^2 b^3} = a^{2:2} b^{3:2} = a b^{3:2} = a'\sqrt{b^3}$, welches einerlei Arten sind, die Viereckswurzel von $a^2 b^3$ auszudrücken.

53. §. $\sqrt{a^2 b^3}$ ist die Wurzel von $a^2 b^3$, dieses ist aber der Inhalt von a^2 und b^3. So ist auch $\sqrt{a^2 b^3}$ der Inhalt der Wurzeln von a^2 und b^3, oder von $\sqrt{a^2}$, und $\sqrt{b^3}$. Es kann demnach der Inhalt der Wurzeln $\sqrt{a^2}$ und $\sqrt{b^3}$ durch $\sqrt{a^2 b^3} = a^{2:2} b^{3:2} = a b^{3:2} = a\sqrt{b^3}$ ausgedrücket werden. Aus diesen bemerke man $\sqrt{a^2 b^3}$ und $a\sqrt{b^3}$, die eben dasselbige bedeuten, woraus sich folgendes schließet: sollen die Wurzeln der Würden miteinander vervielfältiget werden, aber im Kleide der Würde bleiben: so kommen

men die Würden unter das Wurzelzeichen zu stehen, als $\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^3}$ gibt $\sqrt{a^2 b^3}$. Werden aber die Wurzeln außer ihrem Würdekleide miteinander vervielfältiget: so stehen sie außer dem Wurzelzeichen, als $\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = ab$; $\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^3} = a\sqrt{b^3}$, $\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^2} = a^2$, oder $a\sqrt{a^2}$.

54. §. Um demnach eine Größe unter das Wurzelzeichen zu bringen, welche davor steht, muß diese Größe zuvor zu der Würde des Wurzelzeigers erhoben werden. Z. B. $a\sqrt[3]{b}$ soll so verändert werden, daß auch a unter das Wurzelzeichen zu stehen komme: so mache man a zu a^3 und schreibe $\sqrt[3]{a^3 b}$, dieser Ausdruck heist, daß die Würfelwurzelen b mit der Würfelwurzel von a^3 vervielfältiget werden soll. Eben dieses drücket $a\sqrt[3]{b}$ aus.

55. §. Mit der Gegenarbeit kann man eine Größe aus dem Wurzelzeichen herausbringen, wenn man die gehörige Wurzel daraus zieht. So wird $\sqrt[3]{a^3 b}$ in $a\sqrt[3]{b}$ verändert, wenn aus a^3 die Würfelwurzel gezogen wird, welches auch bedeutet, daß die Würfelwurzel aus b mit der Würfelwurzel aus a^3 vervielfältiget ist. Dieses Versetzen

sezen geht nur mit den Theilen an, welche durch die Vervielfältigung zusammen gekommen sind. In $\sqrt{(a+b)}$ geht das gar nicht, denn das heist nicht die Summe zweier Wurzeln nehmen, sondern die Wurzel aus der Summe. Ein anders ist $\sqrt{(a+b)}$, auch ist ein anders $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

56. §. Eine jede Zahl kann als ein Inhalt angesehen werden; sie kann demnach mit ihren Vervielfältigern oder Theilern geschrieben werden, und läßt sich bei dem Wurzelzeichen behandeln, wie die Buchstaben. Z. B. das Viereck von 16 hat 4 zur Wurzel. Diese Wurzel $4=\sqrt{16}=\sqrt{4.4}=2\sqrt{4}=\sqrt{8.2}=\sqrt{2.2.4}$.

Die Wurzel von $24=\sqrt{24}=\sqrt{4.6}=2\sqrt{6}$

Die Würfelwurzel von $24=\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{4.6}$

auch $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3.8}=2\sqrt[3]{3}$

57. §. **Wurzelgrößen miteinander vervielfältigen.**

Das Wurzelzeichen drücke man durch Brüche aus, und nehme die Summe davon zum Würdezeiger der Größe. Z. B.

$\sqrt{a^2}.\sqrt{a^3}$ ist eben so viel als $a^{2:2}.a^{3:2}$

$=a^{5:2}=\sqrt[2]{a^5}$

$\sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a^2}$ ist eben so viel als

$$a^{1:3} . a^{2:3} = a^{3:3} = a$$

Sind die Nenner nicht gleich: so muß man sie gleich machen. Z. B.

$\sqrt[3]{a} . \sqrt{a}$ ist eben so viel als $a^{1:2} . a^{1:3}$

unter einerlei Nenner $a^{3:6} . a^{2:6} = a^{5:6} = \sqrt[6]{a^5}$

Der lezte Ausdruck zeiget zugleich, daß der Nenner des Wurzelzeigers in das gewöhnliche Wurzelzeichen getragen werde, wenn damit die Wurzel geschrieben werden soll.

58. §. Sollen die Wurzeln das gewöhnliche Zeichen behalten: so werden die Größen vor dem Zeichen miteinander vervielfältiget, und die unter dem Zeichen auch miteinander. Z. B.

$\sqrt{a} . \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{9a}$,

$\sqrt{12} . \sqrt{3} = \sqrt{36}$,

$a\sqrt{x^2} . c\sqrt{y^2} = ac\sqrt{x^2y^2}$,

$2\sqrt{x} . 3\sqrt{y} = 6\sqrt{xy}$.

Es können auch die Größen vor dem Zeichen, hinter dasselbe zuvor getragen werden. Z. B.

$a\sqrt{x^2} . c\sqrt{y^2} = \sqrt{a^2x^2} . \sqrt{c^2y^2} = \sqrt{a^2c^2x^2y^2} = acxy$

$2\sqrt{x} . 3\sqrt{y} = \sqrt{4x} . \sqrt{9y} = \sqrt{36xy} = 6\sqrt{xy}$.

59. §. Diese Vervielfältigung mit dem gewöhnlichen Wurzelzeichen hat nur statt, wenn gleiche Wurzelzeiger da sind.

Einige Beispiele zur Uebung.

I.
$$\begin{array}{l} 3+\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} \\ \hline 6+2\sqrt{2} \\ \quad +3\sqrt{2}+\sqrt{4} \\ \hline 6+5\sqrt{2}+\sqrt{4} \end{array}$$

oder
$$\begin{array}{l} 3+\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} \\ \hline 6+2\sqrt{2} \\ \quad +3\sqrt{2}+2 \\ \hline 6+5\sqrt{2}+2 \end{array}$$

II.
$$\begin{array}{l} \sqrt{5}+\sqrt{3} \\ \sqrt{5}+\sqrt{3} \\ \hline \sqrt{5.5}+\sqrt{3.5} \\ \qquad +\sqrt{3.5}+\sqrt{3.3} \\ \hline \sqrt{5.5}+2\sqrt{3.5}+\sqrt{3.3} \end{array}$$

oder $5+2\sqrt{3.5}+3$

III.
$$\begin{array}{l} 3+2\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \\ \hline 6+4\sqrt{3} \\ \quad -3\sqrt{3}-2\sqrt{9} \\ \hline 6+\sqrt{3}-2\sqrt{9} \end{array}$$

IV.
$$\begin{array}{l} 3+\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} \\ \hline 9+3\sqrt{3} \\ \quad -3\sqrt{3}-\sqrt{9} \\ \hline 9-\sqrt{9}=9-3 \end{array}$$

V. $\sqrt{4}+\sqrt{8}$
$\sqrt{4}+\sqrt{8}$

$4+\sqrt{4.8}$
$+\sqrt{4.8}+8$

$4+2\sqrt{4.8}+8$
oder $4+4\sqrt{8}+8$
oder $4+8\sqrt{2}+8$.

60. §. Wurzelgrößen miteinander theilen.

Das Wurzelzeichen drücke man durch Brüche aus, und ziehe diese Brüche voneinander ab. Z. B.

$\sqrt[3]{a^3}:\sqrt[3]{a^2}= a^{3:3}:a^{2:3}=a^{1:3}=\sqrt[3]{a}$

Ungleiche Nenner müssen zuvor gleich gemacht werden:

$$\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{a^2}= a^{3:4}:a^{2:3}$$

unter gleichen Neñern $a^{9:12}:a^{8:12}=a^{1:12}=\sqrt[12]{a}$

61. §. Wenn unter einerlei Wurzelzeichen auch einerlei Würde ist: so verschwindet die Wurzelgröße. Z. B.

$4\sqrt{a}:5\sqrt{a}=4:5=\frac{4}{5}$, $6\sqrt{2}:3\sqrt{2}=2$,
$\sqrt{2}:\sqrt{2}=1$

62. §. Man soll aus $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ die Wurzelgröße aus dem Nenner fortschaffen.

Der

Der Bruch bleibt unveränderlich, wenn Zähler und Nenner mit einerlei Zahl vervielfältiget werden. Man vervielfältige demnach Zähler und Nenner mit $-1+\sqrt{2}$ oder mit $1-\sqrt{2}$: so wird die Wurzelgröße verschwinden, weil im Nenner $1+\sqrt{2}$ ist, und der Werth des Bruches wird bleiben.

$3+2\sqrt{2}$ Zähler.
$-1+\sqrt{2}$

$-3-2\sqrt{2}$
$+3\sqrt{2}+4$

$-3+\sqrt{2}+4$
oder $1+\sqrt{2}$ neue Zähler.

$1+\sqrt{2}$ Nenner.
$-1+\sqrt{2}$

$-1-\sqrt{2}$
$+\sqrt{2}+2$

$+1$ neue Nener.

der neue Bruch ist $\frac{1+\sqrt{2}}{1}=1+\sqrt{2}$

Um aus $\frac{3+2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ den Nenner fortzuschaffen, wird Zähler und Nenner mit $-1-\sqrt{2}$ vervielfältiget.

$3+2\sqrt{2}$ Zähler.
$-1-\sqrt{2}$

$-3-2\sqrt{2}$
$-3\sqrt{2}-4$

$-7-5\sqrt{2}$ neue Zähler.

$1-\sqrt{2}$ Nenner.
$-1-\sqrt{2}$

$-1+\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}+2$

1 neue Nenner.

neue Bruch $\frac{-7-5\sqrt{2}}{1} = -7-5\sqrt{2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

63. §. Wenn der Würdezeiger verneint ist: so ist das eben so viel, als wäre 1 mit dieser Würde getheilet, so ist a^{-2} eben so viel als $\frac{1}{a^2} = 1 : a^2$.

denn a^{-2} ist aus einer Theilung entstanden, worin eine Würde mit einer andern, die um 2 Staffeln höher war, getheilet worden ist, z. B. $a : a^3$, oder $a^3 : a^5$, beides gibt a^{-2}, ersteres $a^{1-3} = a^{-2}$, das andere $a^{3-5} = a^{-2}$

64. §. Deswegen ist $a^{-m:n}$ eben so viel, als $\frac{1}{a^{m:n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$; denn $a^{m:n}$ eben so viel, als $\sqrt[n]{a^m}$

65. §. a^0 ist 1. denn $a^1 : a^1 = a^{1-1} = a^0$ oder $a^2 : a^2 = a^{2-2} = a^0$. Ueberhaupt entsteht a^0, wenn gleiche Würden miteinander getheilet werden: nun ist aber eine solche Würde in der andern nur 1 mal.

66. §.

66. §. Zuweilen sind die Wurzelgrößen unter dem Wurzelzeichen verneint, wie $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-a^2}$. Dergleichen verneinte Wurzelgrößen unter einem geraden Wurzelzeiger werden **unmögliche** genannt. Denn so wohl bejate als verneinte Grössen bekommen bei einem geraden Zeiger +, und niemal —, als

$$-a.-a=+a^2, -a.-a.-a.-a=+a^4.$$

Unter ungeraden Zeigern haben allein verneinte Würden statt. $-a.-a.-a=-a^3$.

67. §. Oben ist es schon gesagt worden, daß die Würden eine Staffelreihe ausmachen, worin die Steigzahl so groß ist, als das erste Glied. Es sei das erste Glied $= a$: so steigt die Reihe folgender gestalt,

$$a^1, a^2, a^3, a^4, a^5 \ldots a^x$$

geht man aber rückwärts: so wird mit a^1 getheilet, welche Theilung in Würdezeigern durch Abziehen geschieht. Die Reihe steigt und fällt folgender gestalt:

$$a^{-x} \ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \ldots a^x$$

$$2^{-x} \ldots, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, \ldots 2^x.$$

welche durch die gewöhnliche Theilung so aussieht:

$$\frac{2}{2^x} \ldots \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots 2^x$$

Anwendung der Rechnung mit Zeichen und Buchstaben.

68. §. Die Rechnungen mit Zeichen haben einen Vortheil, den man bei dem gemeinen Rechnen nicht findet. In dem gemeinen Rechnen werden die Zahlen so durcheinander geworfen, daß man nicht weiß, woraus und wie sie entstanden sind. Wer wird es der Zahl 24 ansehen, daß sie der Inhalt von 5 und $4\frac{4}{5}$ ist? Schreibt man aber anstatt 24, 5. $4\frac{4}{5}$: so sieht man, daß der Inhalt 24 gemeinet ist, und auch, woher dieser Inhalt entspringet. Das ist aber der einzige Vortheil nicht; dieser führet auf einen beträchtlichern, wie man nämlich das mit wenigem ausführen könne, wozu sonst viele Zeit und Arbeit erfodert wird. Einige Proben davon wollen wir hier vorläufig anführen; mehrere wird man bei den Aufgaben finden.

69. §. Ein Fuder Wein kostet 256 Gulden, wie hoch wird die Maaß zu stehen kommen?

256 Gulden werden durch die Vervielfältigung zu Kreuzern gemacht. Dieser Inhalt wird mit 10 (so viel Ohm gehen auf ein Fuder) getheilet; dieses wird mit 48 getheilet, weil 48 Maaß auf die Ohm gerechnet werden: so bekömmt man das

das Verlangte. Das ist nun ziemlich weitläufig; wir wollen es in Zeichen ausdrücken.

256 wird mit 60 vervielfältiget 256.60
dieser Inhalt wird mit 10 getheilet . . . . $\frac{256.60}{10}$

dieses wird mit 48 getheilet . . . . $\frac{256.60}{10.48}$

In dem lezten Ausdrucke liegt die Auflösung der Frage. Man kürze denselben ab: so bleibt noch dieses übrig

$$\frac{256.\,6\not{0}}{1\not{0}.\,48} \text{ gibt } \frac{256.\,\not{6}}{\not{4}8} \text{ gibt } \frac{256}{8}$$

Nun wird 256 leicht mit 8 getheilet, und gibt 32 Kreuzer für eine Maaß Wein. Da nun 60, 10, 48 ständige Zahlen sind, wenn man in Kreuzern rechnet, das Fuder 10 Ohm, und die Ohm 48 Maaß hat: so ist diese Auflösung allgemein, und gibt folgende Regel: **Die Zahl der Gulden wird mit 8 getheilet, was heraus kömmt, gibt die Zahl der Kreuzer für eine Maaß.** Wer kann den Grund davon ohne die Rechnungszeichen einsehen?

Die Maaß kostet 32 Kreuzer, wie viel das Fuder?

32 wird durch 48 zu Ohm, durch 10 zu Fuder gemacht, und durch 60 in Gulden verwandelt. Im Ausdrucke sieht dieses so aus:

$$\frac{32.\ 48.\ 1\not{0}}{6\not{0}} \text{ gibt } \frac{32.\ \not{4}8}{\not{6}} \text{ gibt } 32.\ 8$$

D. i. 32 als die Zahl der Kreuzer wird mit 8 vervielfältiget: so gibt der Inhalt so viel Gulden für das Fuder, nämlich 256 fl.

Die Ohm Wein kostet 30 Gulden, wie viel eine Maaß?

30 Gulden wird durch 60 zu Kreuzern gemacht, und der Inhalt mit 48, die Maaßzahl für eine Ohm, getheilet. Im Ausdrucke sieht das so aus:

$$\frac{30.\ \not{6}\not{0}}{\not{4}8} \text{ gibt } \frac{30.\ 10}{8} \text{ gibt } \frac{300}{8} \text{ gibt } 37\tfrac{1}{2} \text{ Kr.}$$

für eine Maaß. Das gibt diese Regel. **Zu den Gulden wird eine Nulle geschrieben, und diese Zahl mit 8 getheilet: was heraus kömmt, ist der Preis einer Maaß in Kreuzern.**

Aus dem Werthe einer Maaß wird der Werth der Ohm so bestimmt: **Die Kreuzerzahl wird mit 8 vervielfältiget, und der Inhalt mit 10 getheilet: so entsteht der Preis einer Ohm in Gulden.**

70. §. Wie viel Zins tragen 6000 fl. zu 5 von 100! Wenn 100, 5 gibt, wie viel 6000? Antw. $\frac{6000.\ 5.}{100}$

In diesem Ausdrucke sind 5 und 100 ständige Zahlen; man kürze sie deswegen ab.

$$\frac{6000.\ \not{5}}{\not{1}\not{0}\not{0}} \text{ gibt } \frac{600\not{0}}{2\not{0}} \text{ gibt } 300 \text{ fl.}$$

Nun gibt der lezte Ausdruck diese Regel: **Vom Kapitale wird die lezte Ziffer abgeschnitten, die andere werden mit 2 getheilet: so hat man den Zins. Die abgeschnittene Ziffer bedeutet so viel Groschen.** Z. B. der Zins von 627 fl. ist 31 fl. 7 Groschen oder 21 Kreuzer.

Suchet man aus dem Zinse das Kapital: so gilt der verkehrte Ausdruck, nämlich 300. 20 gibt 6000 fl. Kapital. Die Regel heißt: **der Zins wird mit 20 vervielfältiget, oder mit 2, und eine Nulle dazugesezet: so hat man das Kapital.**

Die angehenkten Kreuzer werden mit 3 getheilet: so gibt der Antheil Gulden. Z. B. zu den Zinsen 31 fl. 21 Kr. gehört das Kapital 627.

```
 31
 20
———
620
  7 dazu, die aus 21 : 3 gefunden werden.
———
627 fl.
```

71. §. Die Summe einer geraden und ungeraden Zahl ist ungerade.

Eine gerade Zahl ist, die mit 2 theilbar ist. So sei die gerade 2 a, die ungerade 2 a + 1; ihre Summe ist 4 a + 1, worin 4 a gerade ist, aber 1 nicht, folglich ist die ganze Summe ungerade.

72. §. Wenn eine ungerade Zahl mit einer geraden Zahl vervielfältiget wird: so ist der Inhalt eine gerade Zahl.

Die ungerade 2 a + 1 werde mit 2 vervielfältiget: so ist der Inhalt 4 a + 2, worin jeder Theil mit 2 theilbar ist.

73. §. Wird eine ungerade Zahl mit einer ungeraden vervielfältiget: so ist der Inhalt ungerade.

Die ungerade 2 a + 1 werde mit 3 vervielfältiget: so ist der Inhalt 6 a + 3 ungerade, weil der lezte Theil mit 2 untheilbar ist.

74. §. Die Summe gerader Zahlen ist gerade. Denn 2 a + 2 a ist mit 2 theilbar.

75. §. Die Summe von einer gleichen Anzahl gleicher ungerader Zahlen ist gerade; aber die Summe von einer ungleichen Anzahl gleicher geraden Zahlen ist ungerade.

I.
$$\begin{array}{r} 2a+1 \\ 2a+1 \\ \hline 4a+2 \end{array}$$

II.
$$\begin{array}{r} 2a+1 \\ 2a+1 \\ 2a+1 \\ \hline 6a+3 \end{array}$$

Im ersten Falle ist es eben so viel als würde eine ungerade mit einer geraden Zahl; in zweiten, als würde eine ungerade mit einer ungeraden vervielfältiget.

76. §. Demnach kann man errathen, in welcher Hand jemand gerad oder ungerad hat. Nämlich, man läßt das in der Rechten immer mit 2, oder jeder anderer geraden Zahl vervielfältigen, und das in der Linken mit 3. Darauf fraget man, ob die Summe beider gerad oder ungerad ist. Ist die Summe gerade: so ist die gerade in der Linken; weil die ungerade durch die Vervielfältigung gerade geworden ist, dieses geschieht aber nur durch eine gerade, mit welcher die Rechte vervielfältiget wird.

Wäre aber die Summe ungerade: so ist die ungerade in der Linken.

77. §. Wenn die Wurzel gerade ist: so ist es auch das Viereck.

Das

Das Viereck von 2 a ist $4a^2$, und mit 2 theilbar.

Das Viereck von $2a+1$ ist $4a^2+4a+1$ ist mit 2 untheilbar.

78. §. Wenn eine Zahl von zwei Ziffern umgekehrt wird, das ist, die Einser zu Zehnern, und die Zehner zu Einsern gemacht, und beide Zahlen von einander abgezogen werden: so ist der Ueberschuß mit 9 theilbar.

Die Zahl bestehe aus den Ziffern a und b, so ist $10a+b$ die Zahl, die umgekehrte ist $10b+a$. Der Unterschied von beiden ist $10a+b-10b-a$, das gibt $9a-9b$, welcher Ueberschuß mit 9 theilbar ist.

Ueberhaupt ist ein solcher Ueberschuß mit 9 theilbar, die Zahl mag so viel Ziffern haben, als sie will.

79. §. Die Summe der Ziffern eines Inhaltes von 9, ist mit 9 theilbar.

Der Inhalt von 9 ist eine Summe etlicher 9. Z. B. $36=4.9$ ist eben so viel, als $9+9+9+9$. Aus jeder 9 wird ein Zehner, wenn man zu jeder 9 Eins setzet. Diese Einser werden von einer 9 genommen: so müssen auch diese Einser mit ihrem Ueberschusse auch wieder 9 machen.

$9+9+9+9$ ist eben so viel als $10+10+10+6$.

In

In der gewöhnlichen Zahlenkunst stehen diese 3 Einser in der zweiten Ordnung und sind so viel Zehner. Deswegen müssen die Ziffern eines Inhaltes von 9, mit 9 theilbar sein.

80. §. Weil 9 + 1 so viel als 10 ist: so sind in jeder Zahl so viel 9 und so viel 1, als Zehner darin sind. Die Zehner und die Summe der Einser geben also die Anzahl der 9, welche in einer jeder Zahl enthalten sind. Z. B. in 72 sind 7 Zehner, folglich 7 Neuner, auch 7 Einser; es sind auch noch 2 Einser da, 7 und 2 Einser machen 1 Neuner, 7 Neuner und 1 Neuner, machen 8 Neuner, oder 8 mal 9.

81. §. Daraus leitet sich eine besondere Art, mit 9 zu theilen. Z. B. 768 sei mit 9 zu theilen.

In 768 sind 76 Zehner und 8 Einser, also auch 76 Neuner, und 76 Einser, in 76 sind 7 Neuner und 6 Einser, also auch 7 Einser, 8, 7, 6 Einser machen 21, darin sind 2 Zehner, also 2 Neuner und 2 Einser, welche mit 1, 3 Einser geben, die Neuner zähle man zusammen:

76
7
2 — 3 Einser

85 Neuner, 3 Einser.
oder $85\frac{3}{9}$

Die

Die ganze Arbeit sieht so aus.
Neuner Einser.

```
7 6 8 gibt    76——8
              7——6
               ——7
                 ————
                 21
              2 — 1
                — 2
          ——————————————
          85 — 3 oder 85 3/9
```

Auf eine ähnliche Art kann man mit jeder andern einfachen Ziffer theilen, z. B. mit 8, wenn man bemerket, daß 10 so viel als 8 + 2. u. s. w.

82. §. **Jede Zahl kann auf verschiedene Art ausgedrücket werden.**

Jede Zahl ist die Summe etlicher Einheiten, und die Summen werden durch das Zusammenziehungs- oder Vervielfältigungszeichen ausgedrücket. Z. B. 6 kann durch 4 + 2, 3 + 3, 5 + 1, und 2. 3 ausgedrücket werden: 20 + 4, 4 . 6 sind einerlei Ausdrücke für 24.

Anstatt 136 kann man sezen 100 + 30 + 6, oder 130 + 6, oder auch 2. 4. 17. Anstatt $\frac{24}{6}$ läßt sich $\frac{4.\ 3.\ 2}{3.\ 2}$ schreiben.

83. §. Diese algebraische Ausdrücke stellen die Bestandtheile einer Größe vor Augen, und geben darum die richtigsten Vortheile an, wie man schon gesehen hat, und noch ferner finden wird.

84. §. **Eine jede Zahl auf eine besondere Art zum Vierecke machen.**

Man weis, daß $a^2 + 2ab + b^2$ ein algebraischer Ausdruck für alle Vierecke ist, wozu die Wurzel $a + b$ gehöret. Man zerlege demnach die gegebene Zahl in zwei Theile, suche von jedem Theile das Viereck, und den zweifachen Inhalt beider Theile, die Summe davon wird das Viereck der ganzen Zahl sein. Z. B. werde das Viereck von 36 gesuchet. 36 ist = 30 + 6

Das Viereck von 30 ist	900
von 6	36
der zweifache Inhalt von 30 und 6	360
das ganze Viereck von 36 =	1296

nach der gewöhnlichen Rechnung

36
36

216 = das Viereck von 6, und der Inhalt von 30.6
108 = das Viereck von 30, und der Inhalt von 30.6

1296

85. §. Ueberhaupt kann man auf solche Art den Inhalt einer jeden Zahl finden. Man vervielfältige 6 mit 6, oder $1 + 2 + 3$ mit $1 + 2 + 3$: so wird man einerlei Inhalt bekommen. So ist der Inhalt von $1 + 2$ und $1 + 2 + 3$ eben so gros als der Inhalt von 3 und 6.

86. §. Das Einmaleins sei auf nebenstehender Art aufgesezet, man verlangt die Summe aller darin befindlicher Zahlen.

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16
10	20	30	40

Die Summe der ersten Seitenzahlen, oder aller Zahlen aus der obersten Reihe werde zum Vierecke gemacht: so hat man die Summe aller Zahlen dieses Einmaleins. Weil aber die oberste Reihe Staffelzahlen enthält: so läßt sich die Summe davon leicht finden, nämlich $(4 + 1) . \frac{4}{2}$ gibt 10; $10 . 10$ gibt 100, die Summe aller Zahlen aus diesem Einmaleins. Denn dieses ganze Einmaleins entsteht, wenn die obere Reihe $1 + 2 + 3 + 4$ mit der Seitenreihe $1 + 2 + 3 + 4$ vervielfältiget wird, wovon der Inhalt eben so groß ist, als von 10 und 10 ihrer Summe (85. §.).

Das

Das Einmaleins mag so groß sein, als man nur immer will: so läßt sich die Summe davon so leicht finden.

87. §. **Man soll die Summe aller Würfel finden, deren Wurzeln von 1 anfangen, und um 1 unterschieden sind.**

Die Summe der Wurzeln wird zum Vierecke gemacht: so hat man die Summe ihrer Würfel. Denn die Summe dieser Würfel ist die Summe eines solchen Einmaleins. Vorstehendes Einmaleins geht in seiner obersten Reihe bis auf 4, und enthält die Summe der Würfel von 1, 2, 3, und 4, deren Würfel 1, 8, 27, 64 sind, wovon die Summe 100 ist. Ohne Versuchen läßt sich diese Eigenschaft gar schön einsehen. Man nehme z. B. in der obern Reihe die Zahl 4, und fahre davon senkrecht herunter bis auf die Querlinie, die linker Hand von 4 an, rechts hinausgezogen wird. Die Reihe dieser beiden Zahlen wird in 16 zusammenstossen, und einen Winkelhaken machen. Alle Zahlen, die in diesem Winkelhaken stehen, machen den Würfel der Zahl 4 aus. Denn der Würfel von 4 ist 4mal das Viereck von 4; das Viereck von 4 ist 16, dieses steht unten im Ecke. Ueber 16 steht 12, das 3 fahre von 4, das mit dem Anfange 4 auch 16 ausmachet;

Eben so viel steht in der Querseite des Winkelhakens, welches dann schon 3mal 4 machet. In beiden Seiten zwischen 4 und 12 findet sich auch noch 8, woraus das vierte 16 wird. In dem ganzen Einmaleins lassen sich solche Winkelhaken denken: es muß demnach die Würfel aller Zahlen enthalten, deren Wurzeln in der obersten Reihe stehen.

88. §. Man soll den Unterschied zweier Zahlen durch die Zusammenziehung herausbringen.

Die Einser des Abzuges werden von 10 abgezogen, alle andere aber von 9 und ihr Unterschied unter die Abziehungszahl geschrieben, diese werden in eine Summe gesammelt, und die lezte Ziffer zur Linken wird ausgestrichen, die andern werden den gesuchten Unterschied bemerken. Z. B. soll 6548 von 7865 abgezogen werden. Ich

6548 Abzug.

7865
3452

~~1~~1317 der Unterschied.

sage: 8 von 10, bleibt 2, das schreibe ich unter 5. 4 von 9. bleibt 5, das schreibe ich unter 6. 5 von 9 bleibt 4, das schreibe ich unter 8. 6 von 9 bleibt 3, das schreibe ich unter 7. Die Summe dieser Zahlen ist 11317, wovon die die erste Ziffer zur Linken ausgestrichen wird: so ist

ist 1317 der Unterschied der Zahlen 7865 und 6548.

Wo viele Zahlen von vielen andern abgezogen werden, da kann diese Abziehungsart Dienste thun. Z. B.

643	Abzüge von - -	854	gibt	211
758	- - - -	783		25
230	- - -	400		170
500	- - - -	942		442
		357		848
		242		
		770		
		500		
		4848		

Dieses Verfahren hat darin seinen Grund, daß man sich die Abziehungszahl um etliche Tausend vermehret annimmt. So wurde im ersten Muster 7865 in 10000 + 7865 verwandelt. Anstatt nun 6548 von 7865 abzuziehen, ziehe ich diese Zahl von 10000 ab, und zähle diese Unterschiede zu 7865. Weil aber die Summe um 10000 zu groß war, so muß diese wieder heraus genommen werden, welches blos durch Hinwegstreichung der ersten Ziffer zur Linken geschieht; zu diesem Ende wird der Zusaz von Tausenden um eine Ziffer grösser, als die Abziehungszahl.

89. §. **Den Unterschied zweier Vierecke finden; deren Wurzeln um 1 unterschieden sind.**

Eine Wurzel sei $a + 1$; ihr Viereck $a^2 + 2a + 1$

Die andere sei a; ihr Viereck a^2

Wird a^2 von $a^2 + 2a + 1$ abgezogen: so bleibt $2a + 1$ übrig. Darum ist der Unterschied solcher Vierecke eben so groß als die Summe ihrer Wurzeln, oder, als die zweifache kleinste Wurzel nebst 1.

90. §. Weiß man das Viereck einer Wurzel: so findet man das Viereck der folgenden Wurzel, wenn man die zweifache erste Wurzel und noch eines dazu zählet.

144 ist die Wurzel von 12
25 das zweifache 12 und 1

169 das Viereck von 13.

91. §. $2a + 1$ ist eine ungerade Zahl. Demnach ist der Unterschied solcher Vierecke immer eine ungerade Zahl. Deswegen haben die Vierecke dieser Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, u. s. w. zum Unterschiede eine ungerade Zahl. Der Unterschied der Vierecke von 1 und 2 ist $2.1 + 1$ oder 3; der Unterschied zwischen den Vierecken von 2 und 3 ist $2.2 + 1$ oder 5; der Un-

Unterschied zwischen 3 und 4 ist 2.3+1 oder 7 u. s. w.

92. §. Die Unterschiede der Vierecke von 1, 2, 3, 4, 5, u. s. w. sind alle ungerade Zahlen von eins an, als: 1, 3, 5, 7, 9, 11 u. s. w. Wird zu einem Vierecke der Unterschied gezählet: so bekömmt man das nächstfolgende Viereck. Durch bloses Zusammenzählen kan man demnach eine Tafel von Vierecken machen, wenn man zu jedem lezten Vierecke die folgende ungerade zählet. Z. B.

Wurzeln.	Unterschied der Vierecke.	Vierecke.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64

93. §. **Wie wird das Viereck der Summe zweier Grössen aussehen?**

Die Summe zweier Größen sei $a + b$

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

das Viereck der Summe $a + b$, dieses gibt folgendes:

Das Viereck zweier Größen besteht aus dem Vierecke a^2 einer Größe a, aus dem Vierecke b^2 der andern b, aus dem zweifachen Inhalte $2ab$ beider Größen a und b.

Die Wurzel dieses Viereckes liegt in jedem Gliede ganz offenbar.

94. §. Das Viereck vervielfältige man mit der Wurzel: so wird sich der Würfel geben. Z. B.

$$\begin{array}{ll} a^2 + 2ab + b^2 & \text{Viereck.} \\ a + b & \text{Wurzel.} \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 & \\ \quad a^2b + 2ab^2 + b^3 & \\ \hline \end{array}$$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ der Würfel von $a + b$.

Weil a und b allgemeine Größe sind; so dienen beide Würden zum Muster eines jeden Viereckes und Würfels, dessen Wurzel aus 2 Theilen besteht. Da benebens jede Zahl als eine Summa

me angesehen werden kann: so muß das Viereck und der Würfel einer jeden Zahl sich nach beiden Mustern richten.

Solchergestalt kann man sich Muster zu jeder Würde verfertigen. Unten wird man eine leichte Art finden, zu jeder Würde zu kommen.

95. §. **Jedes Glied einer Unterschiedsreihe aus dem ersten Gliede und der Steigzahl, ohne die Mittelglieder, finden.**

Das erste Glied sei a, die Steigzahl d, und man verlangt das 6te Glied. Die ganze Reihe sieht so aus: (195 Rech.)

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
a,	a+d,	a+2d,	a+3d,	a+4d	a+5d.

Das erste Glied hat keine Steigzahl; jedes andere hat so viel Steigzahlen, als Glieder vorhergehen. Darum etnhält jedes Glied das erste Glied, und die Summe von so viel Steigzahlen, als Glieder vorhergehen. Verlangt man nun das cte Glied, d. i. das Glied zu a und d, wozu die Gliederzahl c ist: so heißt das Glied:

$$a+(c-1)d.$$

96. §. **Die Summe aller Glieder in einer Unterschiedsreihe finden.**

Alle 6 obige Glieder seze man untereinander, und nehme die Summe davon.

$$\begin{array}{l} a \\ a+d \\ a+2d \\ a+3d \\ a+4d \\ a+5d \\ \hline 6a+15d \end{array}$$

$6a+15d$ die Summe aller 6 Glieder. $6a+15d$ ist auch $3.2a+3.5d$ oder $(2a+5d).3$, oder $(a+a+5d).3$

$a+a+5d$ ist die Summe des ersten und lezten Gliedes. 3 ist die halbe Gliederzahl. Darum findet man die Summe aller Glieder, wenn die Summe des ersten und lezten Gliedes mit der halben Gliederzahl vervielfältiget wird.

97. §. Jedes Glied aus einer Theilungsreihe finden, wenn das erste Glied a, und b die Steigzahl ist.

Die Reihe der Staffelzahlen macht sich dergestalt.

I.	II.	III.	IV.	V.	
a,	ab,	ab^2,	ab^3,	ab^4	u. s. w.

Der Augenschein gibt es, daß jedes Glied aus dem Inhalte des ersten Gliedes, und dem Inhalte so viel Steigzahlen, als Glieder vorhergehen, bestehet. Demnach ist das cte Glied in dieser

Reihe

Reihe ab^{c-1}, das ist, die Steigzahl wird zur Würde $c-1$ erhoben, und damit das erste Glied vervielfältiget.

98. §. **Die Summe aller Glieder in einer Theilungsreihe finden.**

Es sei die Reihe a, ab, ab^2, ab^3, ab^4, (I., II., III., IV., V.) deren Summe man suchet. Das VIte Glied davon wäre ab^5. Die ganze Reihe vervielfältige man mit der Steigzahl:

$$\begin{array}{l} a, + ab, + ab^2, + ab^3, + ab^4 \\ b \\ \hline ab, + ab^2, + ab^3, + ab^4, + ab^5 \end{array}$$

Diese lezte Staffelreihe enthält die erste so vielmal, als die Steigzahl b Einser hat. Von derselben ziehe man die erste Staffelreihe ab.

$$\begin{array}{rl} & ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ab^5 \\ \text{Die erste Staffelr.} & a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 \text{ abgezogen.} \\ \hline \text{Bleibt} & -a + ab^5, \text{ oder } ab^5 - a. \end{array}$$

War nun die zweite Staffelreihe bmal größer, als die erste: so wird der Ueberschuß $ab^5 - a$ nach der Abziehung der ersten Reihe einmal weniger als bmal größer sein, als die ganze erste Reihe. Wird aber $ab^5 - a$ durch $b - 1$ getheilet: so wird $ab^5 - a$ einmal weniger

niger als bmal kleiner. Es wird deswegen $\frac{ab^5-a}{b-1}$ so groß sein als die erste Reihe. Dieser Ausdruck gibt demnach die Summe aller 5 Glieder der gegebeneu Staffelreihe. In $\frac{ab^5-a}{b-1}$ ist ab^5 das sechste Glied der gegebenen Staffelreihe, und folglich um eins weiter; a ist das erste Glied, $b-1$ ist die um 1 verminderte Steigzahl. Nun gibt der Ausdruck diese Regel; um **die Summe aller Glieder in der Theilungsreihe zu finden, suchet ein Glied weiter, als gegeben ist. Davon zieht das erste Glied ab. Den Unterschied theilet mit der um eins verminderten Steigzahl.**

Von den Gleichungen, und ihren Auflösungen.

99. §. Ein Ausdruck, worin etliche Größen einander gleich gesezet werden, heist eine Gleichung, als, a=8−b; 7+3=10. Erstes bedeutet: a ist eben so viel als 8 weniger b; das zweite heist: 7 und 3 machen so viel aus als 10.

100. §. Die Gleichungen dienen dem Rechner, den Werth einer Unbekannten zu finden: wenn er dieselbe mit bekannten Größen vermischet, und eben so behandelt, wie die Bekannten. Zu diesem Ende werden die Unbekannten mit den Buchstaben x, y, oder z gemeiniglich benennet. Eine solche Gleichung wäre z. B. x=24:6, welcher Ausdruck dieses sagen will: Eine gewisse Zahl, die noch zur Zeit unbekannt ist, und deswegen x heist, ist so groß als 24, welche Zahl zuvor mit 6 getheilet wird.

Will man Buchstaben, anstatt der Zahlen sezen: so kann a für 24, und b für 6 gesetzet werden und die Gleichung heist: x=a:b

101. §. Alle Gleichungen fallen so leicht nicht aus, als die vorigen. Meistens ist die Unbekannte nach den verschiedenen Rechnungsarten so mit

mit andern Größen besezet, daß man ihren Werth so leicht nicht einsieht. In diesem Falle muß man suchen die Bekannten hinweg zu schaffen, damit die Unbekannte auf einer Seite allein stehen bleibe. Hierbei ist aber wohl zu sorgen, daß die einmal festgesezte Gleichung nicht gestöret werde. Die Wage ist ein schönes Bild der Gleichung. In einer Schale liegt ein Stein mit noch 3 Pfund, in der andern liegen 18 Pf. im Gleichgewichte. Will man nun das Gewicht des Steines wissen: so nehme man aus einer Schale die 3 Pfund, und aus der andern eben so viel. In diesem Falle wird das Gleichgewicht bleiben. Da aber einer Seits der Stein allein ist: so kömmt heraus, daß der Stein 15 Pf. schwer ist.

102. §. Wenn die bekannten Zahlen mit + bei der Unbekannten stehen: so streicht man dieselbem mit dem Zeichen aus, und zieht auf der andern Seite so viel ab. Z. B. $x + 3 = 18$

$$x = 15$$

indem + 3 von x hinweggelassen wird: so wird diese Seite um 3 kleiner. Soll aber das Gleichgewicht bleiben: so muß man auf der andern Seite 3 von 18 abziehen. Diese Abziehung kann man auch blos anzeigen, alsdann wird 3 mit seinem Zeichen von x hinweggelassen, und mit — auf die andere getragen.

I. $x+3=18$
$x=18-3$
$x=15$

II. $x+b=a$
$x=a-b$

103. §. Wenn eine verneinte Größe von einer Seite hinweggenommen wird: so muß auf der andern eben so viel zugezählet werden.

$x-3=15$
$x=18$

Denn wird von $x-3$ die verneinte hinweggenommen: so wird diese Seite um so viel größer, da die Abziehung der verneinten eine Vermehrung ist. Wird nun eine Seite um 3 größer: so muß es die andere nach dem Gesetze der Gleichheit auch werden.

Bei dem blosen Versezen wird 3 von x mit seinem Zeichen hinweggenommen, und mit + auf die andere versezet.

I. $x-3=15$
$x=15+3$
$x=18$

II. $x-b=a$
$x=a+b$

104. §. Ueberhaupt verändern die bejaten oder verneinten Größen bei dem Versezen ihr Zeichen.

$x+y-8=20$
$x+y=20+8$
$x=20+8-y$

105. §. Wenn eine Größe durch die Vervielfältigung bei einer andern steht: so wird dieselbe da ausgestrichen, und die ganze andere Seite wird damit getheilet.

$$3x = 24 - 6$$
$$x = 8 - 2$$

Denn wird 3 von 3 x hinweggestrichen: so wird diese Seite 3mal kleiner. Vermöge der Gleichung muß die andere Seite auch 3mal kleiner werden, welches durch die Theilung geschieht.

Diese Theilung kann man auch blos anzeigen.

I. $3x = 24 - 6$

$$x = \frac{24 - 6}{3}$$

oder

$$x = \frac{24}{3} - \frac{6}{3}$$

II. $ax = c + d$

$$x = \frac{c + d}{a}$$

oder

$$x = \frac{c}{a} + \frac{d}{a}$$

106. §. Wenn eine Größe durch die Theilung zu einer andern gekommen ist: so wird dieser Theiler da hinweggestrichen, und die ganze andere Seite damit vervielfältiget.

$$\frac{x}{2} = 8 + y$$
$$x = 16 + 2y$$

Denn

Denn x ist 2mal größer als $\frac{x}{2}$: darum muß auch $8 + y$ 2mal größer werden, damit die Gleichheit bleibe. Das leztere geschieht, wenn die ganze andere Seite mit 2 vervielfältiget wird.«

107. §. So oft ein Theiler hinweggeschaffet wird: eben so oft muß auch jedes andere Glied damit vervielfältiget werden, sonst leidet die Gleichheit.

I. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 52$	I. Alle Glieder werden mit 2 vervielf.
II. $x + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{4} = 104$	II. alle Glieder mit 3
III. $3x + 2x + \frac{6x}{4} = 312$	III. alle Glied. mit 4
IV. $12x + 8x + 6x = 1248$	IV. alle x werden in eine Sum. geb.
V. $26x = 1248$	V. x wird allein gebracht.

$$x = 48$$

Hier merke man, daß der Zähler, mit dessen Nenner alle andere Glieder vervielfältiget werden, ohne seinen Nenner geschrieben wird; weil der Zähler dadurch schon so viel mal größer wird.

108. §. Man kann auch voraus die Summe dieser Brüche nehmen.

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=52$$

Die Summe dieser Brüche,

$$(12)$$

$$\frac{x}{2}.\ 6.\ 6x$$

$$\frac{x}{3}.\ 4,\ 4x$$

$$\frac{x}{4}.\ 3,\ 3x$$

$$\frac{13x}{12}$$

$$\frac{13x}{12}=52 \quad \text{oder} \quad \frac{13x}{12}=52$$

$$13x=624 \qquad 13x=52.12$$

$$x=48 \qquad x=\frac{52.12}{13}$$

$$x=4.12=48$$

109. §. Man kann auch alle Glieder mit dem Inhalte aller Nenner, oder mit einer Zahl, die mit allen Nennern theilbar ist, vervielfältigen, und

und die Zähler mit den Nennern theilen: so werden die Brüche auch verschwinden.

$$\text{I. } \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 52$$

mit 24

$$\frac{24x}{2} + \frac{24x}{3} + \frac{24x}{4} = 1248$$

$$12x + 8x + 6x = 1248$$

$$\text{II. } \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 52$$

mit 12

$$\frac{12x}{2} + \frac{12x}{3} + \frac{12x}{4} = 624$$

$$6x + 4x + 3x = 624$$

110. §. Weil die einzige Sorge bei den Veränderungen der Gleichungen darauf gerichtet sein muß, damit die Gleichheit bleibe: so kann man sich aller Vortheile der Abkürzungen bedienen, z. B.

$$12x + 8x + 6x = 1248$$

mit 2 getheilet

$$6x + 4x + 3x = 624.$$

111. §. Die Unbekannte muß immer + haben, wenn man ihren Werth suchet. Deswegen muß man x auf die andre Seite tragen: wenn es auf einer − hätte. Z. B.

$$18 - x = 3$$
$$18 = 3 + x$$
$$18 - 3 = x$$

112. §. Stehen auf beiden Seiten Unbekannte: so bringt man sie auf diese Seite zusammen, wo ihre Summe, oder die gröste davon + bekömmt.

I. $4a + 6x = 3b - 4x$
$$4a + 10x = 3b$$
$$10x = 3b - 4a$$
$$x = \frac{3b - 4a}{10}$$

II. $4a - 6x = 3b + 4x$
$$4a = 3b + 10x$$
$$\frac{4a - 3b}{10} = x$$

113. §. Haben die Unbekannten auf beiden Seiten einerlei Zeichen: so streicht man einer seit-

seits die kleinste aus, und auf der andern Seite zieht man so viel ab.

I. $4a - 6x = 3b - 4x$

$4a - 2x = 3b$

$4a - 3b = 2x$

$\frac{4a - 3b}{2} = x$

II. $4a + 6x = 10x$

$4a = 4x$

$a = x$

III. $3y = 16y - 5c$

$0 = 13y - 5c$

$5c = 13y$

$\frac{5c}{13} = y$

IV. $25a + \frac{18z}{5} = 15z + 3d$

$125a + 18z = 75z + 15d$

$125a = 57z + 15d$

$125a - 15d = 57z$

$\frac{125a - 15d}{57} = z$

114. §. In der Würde findet sich die Unbekannte, wenn man beiderseits die gehörige Wurzel auszieht. Z. B.

$$\begin{array}{lll} \text{I. } \underline{x^3} = 9 & \text{II. } x^2 = a^2 & \text{III. } \underline{x^2} = 9 \\ \quad 3 & & \quad 4 \\ x^3 = 27 & x = a & x^2 = 36 \\ x = 3 & & x = 6 \end{array}$$

115. §. Bei wurzellosen Größen wird die Wurzel angezeiget. Z. B.

$$\begin{array}{ll} x^3 = 18 & x^2 = a + b \\ x = \sqrt[3]{18} & x^2 = \sqrt{a + b} \\ \text{oder } x = 18^{1:3} & \text{oder } x = (a + b)^{1:2} \end{array}$$

116. §. Wenn in einer Gleichung mehr, als eine Unbekannte ist: so suchet man eine davon herauszubringen, indem man den Werth dieser Unbekannten in einer andern gegebenen Gleichung aufsuchet, und denselben in eine überträgt. Z. B: sein beide Gleichungen gegeben.

I. $x + y = 24$ II. $x - y = 12$

Hier suche man den Werth von x in der ersten Gleichung, der ist, $x = 24 - y$.

Hier

Diesen trage man in die zweite Gleichung an statt x: so gibt es

$$24 - y - y = 12$$
$$24 - 2y = 12$$
$$24 = 12 + 2y$$
$$12 = 2y$$
$$6 = y$$

Um nun den Werth von x zu bekommen, seze man in $x = 24 - y$ den gefundenen Werth von $y = 6$: so gibt das

$$x = 24 - 6$$
$$x = 18$$

117. §. Wenn die Unbekannte in einer Gleichung mit einer Zahl vervielfältiget ist: so muß der Werth von einer Unbekannten zuvor mit eben dieser Zahl vervielfältiget werden.

I. $2x + y = 48$ II. $x - y = 12$

$$x = 12 + y$$

Der Werth von x ist in der zweiten Gleichung $12 + y$; soll derselbe statt x in die erste Gleichung übertragen werden: so muß er zuvor mit 2 vervielfältiget werden, 2 mal $12 + y$ gibt aber $24 + 2y$, dieses seze man in die erste

Gleichung an statt $2\sqrt{x}$: so entsteht daraus diese Gleichung

$$24 + 2y + y = 48$$
$$3y = 24$$
$$y = 8$$

Der Werth von y bestimmt nun den Werth von x. Es war $x = 12 + y$

$$y = 8$$

darum ist $x = 12 + 8$

$$x = 20$$

118. §. Man kann auch zwei oder mehr Gleichungen ihrer Gleichheit unbeschadet, zusammenziehen, oder eine von der andern abziehen, so wird eine oder die andere Unbekannte verschwinden, wenn sie widrige Zeichen haben.

	Durch
$x + y = 24$	Zusammenziehung
$x - y = 10$	Zusaz
$2x = 34$	Die Summen von beiden
$x = 17$	
$x + y = 24$	durch Abziehung
$x - y = 10$	Abzug
$2y = 14$	der Ueberschuß von beiden
$y + 7$	

119. §. Damit man eine Unbekannte ausstosen könne, ist nothwendig, daß beide von einerlei Größe sein. Haben sie nicht einerlei Größe: so wird jede Gleichung wechselweise mit dem Mitzähler der Unbekannten, die verschwinden sollen, vervielfältiget, und danach wird abgezogen. Hier

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } 6x + 5y = a \\ \text{II. } 3x - 7y = b \end{array}\right\}$$ sollen x verschwinden, darum vervielfältige man die erste ganze Gleichung mit 3, und die zweite mit 6, welche die wechselseitigen Mitzähler sind.

Die so veränderten Gleichungen sind nun:

$$\text{I. } 18x + 15y = 3a$$

$$\text{II. } 18x - 42y = 6b \quad \text{Abzug.}$$

$$57y = 3a - 6b \quad \text{der Ueberschuß.}$$

120. §. Man schaffet auch eine Unbekannte fort, wenn man von dieser den Werth in beiden Gleichungen suchet, und hernach aus diesen Werthen eine Gleichung machet.

$$\text{I. } x + b = d \qquad \text{II. } x - 5a = 5y$$

$$x = d - b \qquad x = 5y + 5a$$

$$d - b = 5y + 5a$$

$$\frac{d - b - 5a}{5} = y$$

121. §. Welche Art die vortheilhafteste sei, muß der Augenschein lehren. Bald hat diese,

bald jene vor der andern den Vorzug. Zuweilen führet eine auf Wege, worauf man nicht mehr fort kommen kann, wozu folgendes Beispiel dienen soll.

I.

$$\text{I. } x+xy=6 \qquad \text{II. } xy^2+xy^3=24$$

$$x=\frac{6}{1+y} \qquad \frac{6y^2+6y^3}{1+y}=24$$

$$6y^2+6y^3=24+24y$$

$$y^2+y^3=4+4y$$

$$y^2+y^3-4y=4$$

II.

$$\text{I. } x+xy=6 \qquad \text{II. } xy^2+xy^3=24$$

$$\cdot\, y^2$$

$$xy^2+xy^3=6y^2$$

$$xy^2+xy^3=24 \quad \text{abgezogen}$$

$$0=6y^2-24$$

$$24=6y^2$$

$$4=y^2$$

$$2=y$$

III.

I. $x+xy=6$ II. $xy^2+xy^3=24$

$$x=\frac{6}{1+y} \qquad x=\frac{24}{y^2+y^3}$$

$$\frac{6}{1+y}=\frac{24}{y^2+x^3}$$

$$\frac{1}{1+y}=\frac{4}{y^2+y^3}$$

$$y^2+y^3=4+4y$$

$$y^2+y^3-4y=5$$

Die zweite Art hat hier die leichteste Auflösung gegeben, da die erste und dritte in höhere Würden kommen.

Was sonst noch für Vortheile vorkommen, wird man bei den Aufgaben selbst sehen.

Aufgaben mit einer Unbekannten.

122. §. Eine Zahl finden, die mit 8, die Zahl 34 ausmache. Diese Zahl sei $= x$, weil sie mit 8, die Zahl 34 geben sollen, so muß x und 8 so groß werden, als 34. Man gehe demnach mit x um, als wenn es bekannt wäre, und man wird folgende Gleichung setzen können:

$$x + 8 = 34$$

man schaffe 8 hinweg, damit x allein auf seiner Seite stehen bleibe.

$$x = 26$$

Es ist auch 8 von 34 abgezogen worden, damit die Gleichung geblieben ist.

Daß nun x eben so viel als 26 ist, zeiget sich daraus, daß die erste Gleichung bleibet, wenn man anstatt x, die Zahl 26 sezet, nämlich

$$26 + 8 = 34.$$

In Buchstaben verfährt man auf gleiche Art.

Die gesuchte Zahl $= x$

$8 = a$

$34 = b$

Die Gleichung ist

$$x + a = b$$

$$x = b - a$$

seiet

setzet man nun an statt der Buchstaben, ihre Zahlen, und behandelt dieselben nach Vorschrift der Zeichen: so bekömmt man

$$x = 34 - 8$$

$$x = 26$$

123. §. Ein 25 jähriger Vater hat einen Sohn von 6 Jahren. Wie alt wird wohl dieser Sohn sein, wenn er halb so alt ist als sein Vater?

Der Sohn ist jezt 6 Jahr alt, und lebet noch fort, bis er die Hälfte vom Alter seines Vaters erreichet, diese Anzahl der Jahre nenne man x: so wird der Sohn 6 + x Jahr alt sein, wenn er halb so alt als sein Vater sein wird.

Der Vater lebet noch eben diese Zeit x: so hat er alsdann ein Alter von 25 + x Jahren; davon soll 6 + x, als des Sohnes Alter, die Hälte sein. Diese beiden Theile werden in eine Gleichung gebracht, wenn man einen so groß macht als den andern. Wird nun 6 + x als die Hälfte mit 2 vervielfältiget: so wird es 25 + x gleich. Deswegen ist die Gleichung

$$2 . 6 + 2x = 25 + x$$

$$12 + 2x = 25 + x$$

$$x = 13$$

Demnach

Demnach hat der Sohn noch 13 Jahre zu leben, und dann wird er 19 Jahre alt sein, der Vater hat unterdessen 38, wovon 19 die Hälfte ist.

Die Gleichung läßt sich auch nach den Worten aufsetzen. Es heist: $6+x$ soll die Hälfte von $25+x$ sein; diese Hälfte ist $\frac{25+x}{2}$. Daher diese Gleichung:

$$6+x=\frac{25+x}{2}$$

$$12+2x=25+x$$

Dieselbige Gleichung, worauf man zuvor gleichsam durch einen Sprung gekommen ist.

Soll aber der Vater dreimal so alt sein: so ist die Gleichung:

$$3.(6+x)=25+x$$
$$18+3x=25+x$$
$$2x=7$$
$$x=\tfrac{7}{2}=3\tfrac{1}{2}$$

Der Sohn hat dann $9\frac{1}{2}$ Jahr, und der Vater $28\frac{1}{2}$, welches dreimal gröser ist, als $9\frac{1}{2}$.

Endlich soll der Vater mit den vorigen Bedingungen 6 mal so alt sein.

$$6.(6+x)=25+x$$
$$36+6x=25+x$$
$$11+5x=0$$
$$x=-\tfrac{11}{5}=-2\tfrac{1}{5}$$

Hier

Hier fällt der Werth von x verneint aus, demnach ist das Alter des Sohnes $6 - 2\frac{1}{5} = 3\frac{4}{5}$; das väterliche Alter ist $25 - 2\frac{1}{5} = 22\frac{4}{5}$. Beide waren schon über der Zeit, da des Sohns Alter ein 6ter Theil des väterlichen Alters war.

124. §. Ein Bruder ist 48 Jahr, und die Schwester 32 alt; wann war die Schwester halb so alt, als ihr Bruder?

Sie soll vor x Jahren halb so alt gewesen sein: so hatte sie damals 32 — x, und der Bruder hatte 48 — x Jahr. Das erste soll die Hälfte vom zweiten sein: so ist

$$2.(32 - x) = 48 - x$$

$$64 - 2x = 48 - x$$

$$16 = x.$$

Die Schwester war demnach vor 16 Jahren halb so alt, als ihr Bruder, und hatte damals 16 Jahre, ihr Bruder aber 32.

125. §. Ein Spieler wird gefraget: wie viel Geld er noch habe; dieser antwortet: 3 mal so viel als ich verloren habe. Wie viel hat er dann verloren? Wenn ich die Zahl des Verlustes, saget er, mit $\frac{1}{6}$ von dem, was ich noch habe, vervielfältige: so bekomme ich eine Zahl, die so groß ist, als die Zahl des Geldes, das

ich

ich vor den Spiele hatte. Wie viel hat er verloren, und bleibt ihm noch übrig?

Verloren hat er $= x$

er hat noch $= 3x$; weil er 3 mal so viel hat, als er verloren.

vor dem Spiele hatt er $= 4x$

$\frac{1}{6}$ von $3x$ ist $= \frac{3x}{6}$ oder $\frac{x}{2}$, damit wird der Verlust x vervielfältiget, und das gibt $\frac{x^2}{2}$.

Dieses $\frac{x^2}{2}$ soll so viel sein, als er vor dem Spiele hatte. Es entsteht dann die Gleichung $\frac{x^2}{2} = 4x$

$x^2 = 8x$

mit x getheilet

$x = 8$. Der Verlust

$3x = 24$ bleibt ihm noch

$4x = 32$ hatte er in allem

$\frac{1}{6}$ von 24 ist $= 4$

mit dem Verluste $= 8$ vervielfältiget

32, so viel hatte er vor dem Spiele.

126. §.

126. §. A sezet auf ein Spiel 100 Gulden, und B 48. Ersterer verliert 2 mal so viel als B; es bleibt ihm aber noch 3 mal so viel als B hat. Wie viel hat jeder verloren?

B hat verloren $= x$
A $= 2x$

So hat B noch $48 - x$; und A behält noch $100 - 2x$. Lezteres ist 3 mal größer als das erste: so ist

$$3.(48 - x) = 100 - 2x$$
$$144 - 3x = 100 - 2x$$

B hat verlohren $44 = x$
A 88

B hat noch 4 Gulden behalten, und A noch 12, welches 3 mal Größer ist, als 4.

127. §. Ein Kasten wird durch 2 Röre in 12 Minuten, durch eine aber in 20 Minuten gefüllet, in wie viel Zeit wird er durch die andere Röre voll werden?

Diese Zeit sei $= x$

in dieser Zeit wird der ganze Kasten gefüllet: so wird durch die zweite Röre in 12 Minuten $\frac{12}{x}$ vom Kasten gefüllet. Hingegen wird die erste

F Röre

Röre in 12 Minuten $\frac{12}{20}$ vom Kasten füllen. Durch beide Röre wird aber der Kasten in 12 Minuten voll. Es muß demnach $\frac{12}{x}$ und $\frac{12}{20}$ oder $\frac{3}{5}$ den ganzen Kasten ausmachen. Der Kasten ist aber = 1: so entsteht

$$\frac{12}{x} + \frac{3}{5} = 1$$

$$60 + 3x = 5x \quad (106 §.)$$

$$60 = 2x$$

$$30 = x$$

durch die zweite Röre wird der Kasten in 30 Minuten voll. Denn in 20 Minuten wird 1 ganzer Kasten voll; wie viel in 12 Minuten? Antw. $\frac{3}{5}$. Folglich muß die andere Röre in eben der Zeit $\frac{2}{5}$ ausfüllen. Wird nun in 12 Minuten $\frac{2}{5}$ des Kastens ausgefüllet; wie viel wird in 30 voll? Antw. 1 ganzer Kasten.

128. §. Ein Kasten wird durch eine Röre in 30 Minuten, durch die andere aber in 20 Minuten voll. In wie viel Zeit wird er voll werden: wenn beide zugleich fliesen?

Diese Zeit sei = x. Wird in 30 Minuten 1 ganzer Kasten voll: wie viel wird in x Minuten davon voll? Antw. $\frac{x}{30}$ vom Kasten.

Wird

Wird in 20 Minuten 1 voll; wie viel wird in x Minuten voll? Antw. $\frac{x}{20}$ vom Kasten. Diese Theile machen den ganzen Kasten aus. Darum ist

$$\frac{x}{30} + \frac{x}{20} = 1$$

$$20x + 30x = 600 \quad (106 §.)$$

$$5x = 60$$

$x = 12$ Minuten, in welcher Zeit der Kasten voll wird, wie man schon in voriger Aufgabe gesehen hat.

129. §. Eine Frau kaufet Eier, von der einen Hälfte kosten 2 Eier 1 Kreuzer, von der andern Hälfte werden 3 Eier mit 1 Kreuzer bezahlet. Sie verkauft die Eier, 5 um 2 Kreuzer, und verliert dabei einen Kreuzer, wie viel Eier hatte sie?

Sie hat Eier $= x$

2 Eier kosten 1 kr.
wie viel $\frac{x}{2}$? Antw. $\frac{x}{4}$ kostet eine Hälfte.

 1 Eier

3 Eier kosten 1 Kr. Antw. $\frac{x}{6}$ kostet die andere

wie viel $\frac{x}{2}$ 8 Hälfte.

Alle haben demnach $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}$ oder $\frac{5x}{12}$ Kreuzer gekostet.

Wenn sie 5 Eier um 2 Kreuzer gibt: so macht das $\frac{2x}{5}$, und das ist um einen Kreuzer weniger als $\frac{5x}{12}$. Darum ist

$$\frac{5x}{12}=\frac{2x}{5}+1$$

$$25x=24x+60 \quad (106 \text{ §.})$$

$$x=60 \text{ Eier hatte die Frau.}$$

Davon kosten 30, —— 15 kr.
und 30 —— 10 kr.

25 kr. in allem.

5 Eier um 2 Kr. geben für 60 in allem 24 Kr. welches um 1 weniger ist als 25.

130. §. Ein Spieler verliert bei dem ersten Spiele die Hälfte seines Geldes und noch einen halben Gulden dazu. Eben so verliert er bei dem zweiten Spiele die Hälfte seines übrigen Geldes und $\frac{1}{2}$ Gulden. Dieser Verlust geht bis

bis zum vierten Spiele, nach welchem sich findet, daß er von allem seinem Gelde nur noch 7 Gulden übrig hat? Wie reich war er vor dem spielen?

gehabt hat er $= x$

Davon verliert er die Hälfte und $\frac{1}{2}$ fl., das gibt $= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

so bleibt noch übrig $= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

davon verliert er die Hälfte und $\frac{1}{2}$ fl., das ist $= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$

es bleibt ihm noch $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$

davon verliert er die Hälfte und $\frac{1}{2}$ fl., das ist $= \frac{x}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x}{8} + \frac{1}{8}$

es bleibt ihm noch $\frac{x}{4} - \frac{3}{4} - \frac{x}{8} - \frac{1}{8} = \frac{x}{8} - \frac{7}{8}$

Davon verliert er die Hälfte, und $\frac{1}{2}$ fl. das ist $= \frac{x}{16} - \frac{7}{16} + \frac{1}{2} = \frac{x}{16} - \frac{1}{16}$

es bleibt ihm end. übrig $\frac{x}{8} - \frac{7}{8} - \frac{x}{16} - \frac{1}{16} = \frac{x}{16} - \frac{15}{16}$;

Da er nun noch 7 übrig hat: so ist

$$\frac{x}{16} - \frac{15}{16} = 7$$

$$x = 127 \quad (106 \text{ §.})$$

demnach hatte der Spieler 127 Gulden.

131. §. Es machet sich jemand einen Zaun in gerader Linie, worin die Stangen eben weit voneinander stehen, der Zwischenraum ist so groß, daß er 2 Stangen fassen kann. In dieser Lage geht der Zaun nur 125 Schuh weit. Er machet aber den Zwischenraum noch einmal so groß, und alsdann erstrecket sich der Zaun auf 208 Schuh. Wie viel Stangen hat er gebraucht?

Die Zahl der Stangen war $= x$

Weil aber 2 Stangen einen Zwischenraum einschliesen: so gibt es eine Stange mehr als Zwischenräume sind.

Demnach ist die Zahl der Zwischenräume $= x - 1$

In jeden Zwischenraum gehen 2 Stangen: so gehen in alle $= 2x - 2$

Die ganze Reihe mit Stangen und Zwischenräumen ist $= 3x - 2$, welche sich auf 125 Schuhe erstrecket.

Die Zwischenräume werden noch einmal so groß: so gehen auch noch einmal so viel Stan-

gen

gen hinein, nämlich $4x - 4$ und die ganze Reihe mit Stangen und Zwischenräumen wäre $5x - 4$, welche sich auf 208 Schuhe erstrecket.

Nun suche man: wie viel Raum und Stangen zu 208 Schuhen gehören: wenn $3x - 2$ zu einer Linie von 125 Schuhen gehören.

$$125 : 3x - 2 = 208 : \frac{624x - 416}{125}$$

aber auch zu eben dieser Linie gehören $5x - 4$: so gibt sich diese Gleichung

$$\frac{624x - 416}{125} = 5x - 4$$

$$624x - 416 = 625x - 500 \quad (105\ \S.)$$

$$84 = x$$

Waren nun 84 Stangen, so waren auch 83 Zwischenräume, in jeden giengen 2 Stangen, das waren für die ganze Reihe von 125 Schuhen 250 Stangen. Der Zwischenraum wird noch einmal so groß: so gehen 332 Stangen darin, und 84 noch dazu, die ganze Reihe könnte jezt 416 Stangen fassen, und erstreckete sich auf 208 Schuh, welches aus diesem Aufsaze folget:

Auf 125 Schuh gehen 250 Stangen; wie viel auf 208? Antw. 416 Stangen.

132. §. Einer läßt die Zahl rathen, die er denket; er sagt aber: wenn man seine Zahl mit 8 vervielfältigte: so wäre sie so viel über 100, als sie jezt darunter ist. Was für eine Zahl hatte er im Sinne?

Diese Zahl war $= x$, mit 8 vervielfältiget macht sie $8x$, und ist über 100, folglich ist dieser Unterschied $8x - 100$, oder um so viel ist sie nun über 100. x ist um $100 - x$ unter 100, oder der Unterschied zwischen 100 und x ist $100 - x$.

Nach der Bedingung soll sie so viel über 100 sein, als sie unverändert darunter ist: so ist die Gleichung:

$$8x - 100 = 100 - x$$
$$9x = 200$$
$$x = 22\tfrac{2}{9}$$, welche Zahl um $77\tfrac{7}{9}$ unter 100 ist. mit 8 vervielfältiget gibt sie $177\tfrac{7}{9}$, und ist auch um $77\tfrac{7}{9}$ über 100.

Man kann die Aufgabe auch so einrichten: daß die Zahl nach der Vervielfältigung etliche mal mehr über 100 ist, z. B. nach der Vervielfältigung mit 8 sei die Zahl 5 mal so viel über 100, als sie vor der Vervielfäl-tigung darunter ist.

133. §. Vor 4 Tagen ist ein Both abgeschicket worden, der täglich nur 10 Stunden

weit

weit geht. Es wird demselben ein zweiter nachgeschicket, der alle Tage 12 weit geht. Wann wird lezterer den ersten einholen?

Wenn einer den andern einholen soll: so müssen beide denselbigen Weg zurücklegen, folglich eben viel Stunden machen, mit dem Unterschiede, daß der leztere weniger Tage dazu brauchet.

Der erste macht täglich 10 Stunden, 4 Tage ist er schon auf der Reise, und er reiset noch x Tage. Demnach ist die Zeit seiner ganzen Reise $= 4 + x$, in welcher er $40 + 10x$ Stunden macht.

Der zweite macht täglich 12, und ist nur x Tage auf der Reise. Er macht also in dieser Zeit $12x$ Stunden, welche den Stunden des erstern gleich sein müssen. Darum entsteht diese Gleichung.

$$12x = 40 + 10x$$
$$2x = 40$$
$$x = 20$$

Der zweite wird den ersten in 20 Tagen einholen. Denn in 20 Tagen macht er 240 Stunden. Der erste macht in 20 Tagen 200 Stunden, und in den 4 Tagen hat er schon 40 gemacht, also 240, wie der zweite.

134. §. Vor 8 Tagen ist ein Both abgegangen, und macht täglich nur 8 Stunden. In

12 Tagen soll denselben ein anderer einholen; wie geschwind muß dieser gehen?

Der erste ist 20 Tage auf der Reise, in welcher Zeit er 160 Stunden zurück leget.

Der zweite hat nur 12 Tage zu gehen, um den ersten einzuholen. Seine Geschwindigkeit ist $= x$, also macht er in allem $12x$ Stunden. Weil er ihn nun dadurch einholet: so ist

$$12x = 160$$
$$x = 13\tfrac{1}{3}$$

Demnach muß der zweite täglich $13\frac{1}{3}$ Stunde machen, welches in 12 Tagen 160 Stunden ausmachet.

135. §. Zwei Laufer laufen nach einem Ziele. Der erste hat 20 Minuten vor, und macht 3 Schritt, wenn der andere 4 machet. Wann werden sie sich antreffen, falls ihre Schritte eben groß sind?

Der erste hat 20 Minuten vor, in welcher Zeit er schon 60 Schritte abgemacht hat, er lauft noch die Zeit x: so hat er in allem $60 + 3x$ Schritte gemacht

Der zweite geht auch die Zeit x, und macht 4 Schritte: so macht er in allem $4x$ Schritte. Die Gleichung entsteht daraus.

$$60 + 3x = 4x$$
$$60 = x$$

Also wird der zweite den ersten in 60 Minuten einholen.

136. §. Wären die Räume oder Schritte sich ungleich, daß 3 Schritte des ersten so groß wären, als 2 Schritte des zweiten: so müßte man die Schritte zuvor auf einerlei Größe bringen; und sagen:

2 Schritte des zweiten machen 3 des ersten; wie viel machen dann 4 Schritte des zweiten? Antw. 6 Schritte.

Wenn nun der erste 3 Schritt machet: so macht der zweite 6, jeden von der Größe des ersten, die aber zusammen vom zweiten in seinen 4 Schritten gemacht werden. Nun wäre die Gleichung:

$$60 + 3x = 6x$$
$$20 + x = 2x$$
$$20 = x.$$

In 20 Schritten holet der zweite den ersten ein.

137. §. In wie viel Zeit wird der Minutenzeiger den Stundenzeiger nach 4 Uhr einholen?

Um 4 Uhr steht der Minutenzeiger auf 60, und der Stundenzeiger auf 4, welcher lezterer schon 4 Stunden vor hat; jede Stunde durchlauft er in 5 Minuten, in dieser Zeit hat er demnach schon 20 Minuten vor; er läuft noch x Sunden, bis er eingeholet wird, das macht 5x Minuten. Sein ganzer Weg in also 20 + 5x Minuten.

In

In derselbigen Zeit x soll der Minutenzeiger den andern einholen, er macht in jeder Stunde 60 Minuten, und in x Stunden, 60x Minuten. Wenn einer den andern einholen soll: so muß beider Weg eben groß sein. Daher ist die Gleichung:

$$20 + 5x = 60x$$

$$4 + x = 12x$$

$$\frac{4}{11} = x$$

In $\frac{4}{11}$ Stunden wird der Stundenzeiger eingeholet, in welcher Zeit derselben $1\frac{9}{11}$ Minuten durchgeht, weil er in einer Stunde 5 Minuten macht.

Der Minutenzeiger erreichet den Stundenzeiger in $\frac{4}{11}$ Stunden, in welcher Zeit er $21\frac{9}{11}$ Minuten durchläuft. Sie erreichen sich also zwischen der 21 oder 22ten Minute auf dem Zifferblatte.

138. §. A, B, und C gewinnen 600 fl. B gewinnt so viel als A, und noch 40 fl. und C gewinnt 2 mal so viel als B. Wie viel gewinnt jeder?

A gewint = x, B eben so viel und noch 40 fl.: so ist sein Gewinn = x + 40.

C Gewinnt 2 mal so viel als B, B gewinnt aber x + 40, dieses 2 mal genommen gibt 2x + 80,

nun

nun ist es der Gewinn für C. Zusammen haben sie 600 Gulden gewonnen, es entsteht demnach diese Gleichung

$$\begin{array}{ll} A & x \\ B & x+40 \\ C & 2x+80 \\ \hline & 4x+120=600 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 4x = 480 & \\ x = 120 & \text{hat A gewonnen} \\ x+40 = 160 & \text{hat B gewonnen} \\ 2x+80 = 320 & \text{hat C gewonnen} \\ \hline 600 & \text{haben alle 3 gewonnen.} \end{array}$$

139. §. Ein Kaufmann legt sein Geld an, daß er am Ende der Jahres sein Kapital noch einmal so groß gemacht hat: wovon er 160 Gulden zur Haushaltung abgibt. Dieses alles sezet er 3 Jahre lang fort, und alsdann ist er 3 mal so reich, als er anfänglich war. Wie stark war sein Kapital?

Sein Kapital sei $=x$; das wird noch mal so groß, und gibt 160 davon aus: so hat er beim Anfange des zweiten Jahrs $= 2x-160$, davon ist das Zweifache weniger 160 am Ende des zweiten Jahres $=4x-320-160=4x-480$. Das Zweifache von diesem, weniger 160, ist

am

am Ende des dritten Jahres = 8x — 960 — 160 = 8x — 1120. Nun ist sein Kapital 3 mal so groß, als es anfänglich war. Es ist demnach diese Gleichu g da:

$$8x - 1120 = 3x$$
$$8x = 3 + 1120$$
$$5x = 1120$$
$$x = 224$$

Dazu gewinnt er	= 224
	448
Zieht davon	160
Bleibt für das 2te Jahr	288
Dazu gewinnt er	288
	576
Zieht davon	160
Bleibt für das 3te Jahr	416
Dazu gewinnt er	416
	832
Zieht ab	160
	672 ist 3 mal größer als 224

140. §. Man findet in einer Rechnung, daß 24 Malter, 4 Simmer, Frucht um 110 Gulden verkaufet worden. In demselbigen Preise sind noch 30 Malter, 6 Simmer um 138 Gulden

den verkaufet worden. Wie viel Simmer sind auf das Malter gerechnet worden?

Auf ein Malter sind x Simmer gerechnet worden: so machen 24 Malter, 4 Simmer $= 24x + 4$, diese haben 110 fl. gekostet.

30 Malter, 6 Simmer machen $= 30x + 6$ Simmer, diese haben 138 fl. gekostet. Nun suche man, wieviel eben diese Simmer nach dem Preise der ersten gekostet haben, nämlich

$24x + 4$ Sr kosten 110 fl. wie viel $30x + 6$ Sr?

Antw. $\frac{3300x + 660}{24x + 4}$ fl.

Weil das nun der Preiß von $30x + 6$ Simmern ist, die auch 138 fl. kosten: so ist die Gleichung:

$$\frac{3300x + 660}{24x + 4} = 138$$

$$3300x + 660 = 3312x + 552 \quad (106\ §.)$$

$$108 = 12x$$

$$9 = x$$

Man hat demnach 9 Simmer auf ein Malter gerechnet.

Auf-

Aufgaben mit zwei Unbekannten.

141. §. Man soll zwei Zahlen suchen, deren Summe 24 ist, ihr Unterschied ist aber 12.

Eine Zahl sei $= x$

Die andere $= y$

So ist $x - y = 12$

$x = 12 + y$

Es ist auch $x + y = 24$

Folglich $12 + y + y = 24$, da $12 + y$ statt x gesezet wird.

$$12 + 2y = 24$$
$$6 + y = 12$$
$$y = 12 - 6$$
$$y = 6$$

und $x = 12 + 6 = 18$

$$18 + 6 = 24$$
$$18 - 6 = 14$$

Bei einer kleinen Ueberlegung kan man diese Aufgabe mit einer Unbekannten lösen. Denn da

da beide 24 ausmachen, und eine davon x ist: so muß die andere 24 — x sein,

140. §. Aus 12x — 2y = 24 findet sich $y = \frac{24}{2} - \frac{12}{1}$. Da uun y die kleine Zahl ist: so entsteht diese allgemeine Regel: **wenn man von der halben Summe zweier Zahlen den halben Unterschied abzieht: so wird man die kleine Zahl bekommen.**

Suchet man aus x + y = 24 den Werth von x: so wird aus x — y = 12, x — 12 = y, und daraus entsteht

$$x + x - 12 = 24$$
$$2x = 24 + 12$$
$$x = \frac{24}{2} + \frac{12}{2}$$

x ist hier die große Zahl, wozu diese allgemeine Regel dienet: **wenn man zur halben Summe zweier Zahlen ihren halben Unterschied nimmt: so wird man die grose Zahl bekommen.**

Diese beide Regeln merke man sich. Vermittelst derselben kan man zuweilen mit leichter Mühe schwere Aufgaben lösen: wenn man nur zwei Unbekannte suchet.

Bayerische Staatsbibliothek München

143. §. Ein Wirth hat zweierlei Wein. Von einem verkauft er die Mas um 24 Kr., und vom andern die Mas um 48 Kreuzer. Davon will er 80 Mas zusammen mischen, daß er die Mas um 32 Kreuzer verkaufen könne. Wie viel soll er von jedem Weine nehmen?

Er nimmt vom ersten $= x$ Mas, die kosten $= 24x$

von zweiten $= y$ die kosten $= 48y$

80 Mas kosten 2560 Kr. jede zu 32 Kreuzer, oder 32. 80

Die Gleichungen sind

I. $x + y = 80$

$x = 80 - y$

Dieser Werth wird in die andere Gleichung getragen..

II. $24x + 48y = 2560$

$24.80 - 24y + 48y = 32.80$

$3.80 - 3y + 6y = 4.80$

$3y = 80$

$y = 26\frac{2}{3}$

Es war $x = 80 - y$,

demnach $x = 80 - 26\frac{2}{3}$

$x = 53\frac{1}{3}$

Er

Er nimmt vom ersten Weine $53\frac{1}{3}$ Mas; zu 24 Kr. jede; diese kosten 1280 Kr.

Vom zweiten, $26\frac{2}{3}$ Mas; zu 48 Kr. jede; die kosten 1280 Kr., zusammen 2560 Kreuzer, eben so viel kosten 80 Mas, jede zu 32 Kr.

144. §. Wenn der Wirth seinen 48iger Wein mit Wasser mischen wolte: wie viel dürfte er Wasser zu einer Mas nehmen, welche darauf nur 32 Kreuzer werth sein solte?

Vom Wein nimmt er $= y$,
Vom Wasser $= x$

Es soll eine Mas gemischet werden: so ist

$$x + y = 1$$
$$x = 1 - y$$

Der Wein y kostet 48 y, das Wasser aber nichts: so ist die zwelte Gleichung

$$48\,y = 32$$
$$6\,y = 4$$
$$3\,y = 2$$
$$y = \tfrac{2}{3}$$

Es ist $x = 1 - y$,
Folglich $x = 1 - \frac{2}{3}$
$$x = \tfrac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}$ Mas Wasser wird zu $\frac{2}{3}$ Mas Wein genommen, und dann ist diese gemischte Mas 32 Kreuzer werth; denn 48. $\frac{2}{3}$ gibt 32.

145. §. Ein Soldat, der 6 Jahre lang dienen muß, wird gefraget, wie lang er schon diene? Dieser antwortet: $\frac{1}{5}$ der verflossenen Zeit ist so groß, als $\frac{1}{4}$ von der Zeit, die er noch dienen muß. Wie lang hat er schon gedienet, und wird er noch dienen?

Gedienet hat er $= x$ Jahre,
Dienen wird er noch $= y$.

In allem soll er 6 Jahre dienen, das gibt

$$\text{I.}\quad x + y = 6$$
$$x = 6 - y$$

$\frac{1}{5}$ von der verflossenen Dienstzeit ist so groß, als $\frac{1}{4}$ der künftigen: so ist die zweite Gleichung:

$$\text{II.}\quad \frac{x}{5} = \frac{y}{4}$$

Oben ist schon $x = 6 - y$

Also $\frac{6 - y}{5} = \frac{y}{4}$

$$24 - 4y = 5y \quad (106\ \S.)$$
$$24 = 9y$$
$$2\tfrac{2}{3} = y$$
$$x = 6 - 2\tfrac{2}{3} = 3\tfrac{1}{3}$$

Er

Er hat demnach $3\frac{1}{3}$ Jahre gedienet, und wird noch $2\frac{2}{3}$ Jahre dienen, wovon $\frac{2}{3}$ der vierte Theil ist, und von $3\frac{1}{3}$ ist $\frac{2}{3}$ der fünfte Theil.

146. §. A und B haben 50 Dukaten getheilet. $\frac{3}{4}$ von A und $\frac{5}{6}$ von B machen zusammen 40 aus. Wie viel hat jeder?

A hat $= x$, B hat $= y$, beide zusammen 50 Dukaten.

$$\text{I.}\quad x + y = 50$$
$$x = 50 - y$$

Dieser Werth wird in die andere Gleichung getragen.

$$\text{II.}\quad \frac{3x}{4} + \frac{5y}{6} = 40$$

$$\frac{3.\,50 - 3y}{4} + \frac{5y}{6} = 40$$

$$3.\,6.\,50 - 3.\,6y + 4.\,5y = 4.\,6.\,40$$

$$3.\,3.\,50 - 3.\,3y + 2.\,5y = 2.\,6.\,40$$

$$450 + y = 480$$

$$\left.\begin{array}{r} y = 30, \\ x = 50 - y = 20 \\ \hline 50 \end{array}\right\} \begin{array}{r} \frac{5}{6}y = 25 \\ \frac{3}{4}x = 15 \\ \hline 40 \end{array}$$

147. §. A und B spielen. A hat 72 und B 52 Thaler bei sich. Am Ende des Spieles hat A 3 mal so viel, als B. Wie viel hat A gewonnen?

A hat gewonnen $= x$, und hat am Ende des Spieles $72 + x$. B hat verloren $= x$, und hat noch übrig y. Darum ist

I. $x + y = 52$ II. $x + 72 = 3y$

$y = 52 - x$ $x + 72 = 156 - 3x$

$4x = 84$

$x = 21$

$y = 52 - x = 31$

148. §. Es hat jemand 2640 Gulden theils mit französischen, theils mit Conventionsthalern, erstern zu 2 fl. 45 kr., den zweiten zu 2 fl. 24 kr. gerechnet, abgetragen. Er hat aber 33 Französische Thaler mehr bezahlet, als Conventionsthaler. Wie viel Stücke hat er von jeder Gattung bezahlet?

Er hat bezahlet an franz. Thal. $= x$
an Convent. $= y$

Der erste gilt 2 Gulden 45 Kreuzer, oder $2\frac{3}{4}$ fl., oder $\frac{11}{4}$ fl., x Thaler machen dann

$\frac{11\,x}{4}$ fl.

Der

Der zweite zu 2 fl. 24 kr., oder $2\frac{2}{5}$ fl., oder $\frac{12}{5}$ fl., gibt für y, $\frac{12y}{9}$. Die Gleichungen sind:

$$\text{I.}\quad x = y + 33$$

$$\text{II.}\quad \frac{11x}{4} + \frac{12y}{5} = 2640.$$

$$55x + 48y = 4 \cdot 5 \cdot 2640 \quad (206\ \S.)$$

$$55y - 1815 + 48y = 52800$$

$$103y = 50985$$

$$y = 495$$

$$x = y + 33 = 528$$

149. §. Um folgende Aufgabe zu verstehen merke man die Zahl 975. Darin nenne ich 9, 7, 5, jede für sich betrachtet, Ziffern, und 975, zusammen genommen, Zahl. Diese Zahl besteht nun aus den drei Ziffern, 9, 7 und 5, wovon 9 aber so viel Hunderte, 7 so viel Zehner, und 5 so viel Einser vermöge ihrer Lage bedeuten.

Man suche eine Zahl, die aus zwei Ziffern besteht. Vervielfältiget man jede Ziffer mit 3,

und nimmt diese Inhalte zusammen: so wird diese Summe die gesuchte Zahl selbst sein. Zählet man aber noch 45 zu der gesuchten Zahl: so wird diese Summe dieselbigen Ziffern haben, aber in einer verkehrten Ordnung, nämlich was in der gesuchten Rechts steht, wird in dieser lezten Summe Links stehen. Wie heist diese Zahl?

Eine Ziffer dieser Zahl sei x, die andere y. Weil die erste Ziffer ein Zehner ist: so muß x in Absicht auf die gesuchte Zahl $10x$ sein, damit man derselben den Plaz ihrer Ordnung ansehe. Die gesuchte Zahl ist demnach $= 10x + y$.

Die Summe der Ziffern ist $= x + y$
vervielfältiget mit 3

$3x + 3y$

Diese Summe soll nun der gesuchten Zahl gleich sein. So ist

$$3x + 3y = 10x + y$$
$$2y = 7x$$

Zu der verlangten Zahl soll noch 45 gezähler werden:

Die verlangte Zahl $= 10x + y$
noch dazu 45

gibt $10x + y + 45$

Diese

Diese soll nun so groß sein, als eine Zahl, welche dieselbigen Ziffern der verlangten Zahl in einer verkehrten Ordnung hat.

Die Ziffern waren x und y, und $10x$ waren die Zehner. Nun müssen umgekehrt $20y$ die Zehner sein.; Die Ordnung ist nun $10y + x$, und diese Zahl soll so groß sein, als die vorige Summe. So ist denn

$$10y + x = 10x + y + 45$$
$$9y = 9x + 45$$
$$y = x + 5$$

Nun weis man den Werth von y: diesen trage man in die oben gefundene Gleichung

$$y = x + 5, \qquad \begin{array}{r} 2y = 7x \\ 2y = 2x + 10 \\ \hline 2x + 10 = 7x \\ 10 = 5x \\ 2 = x \\ y = 7 \end{array}$$

Die gesuchte Zahl besteht demnach aus den Ziffern 2 und 7. Da aber x die Zehner sind: so ist die Zahl = 27.

2 mit 3 vervielf. = 6
7 mit 3 vervielf. = 21

27 = der ges. Zahl.

27
45 dazu

72 hat dieselbigen Ziffern, wie 27. aber in einer verkehrten Ordnung.

150. §. Man fraget, wie viel Uhr es sei? Die Antwort ist: die von Mittage verflossenen Stunden sind $\frac{2}{3}$ von denen, die noch bis Mitternacht kommen werden. Wie viel Uhr war es nun?

Es war = x Uhr,
bis Mitternacht sind noch = y
Die Gleichungen sind

I. $x + y = 12$, weil von Mittage bis Mitternacht 12 Stunden sind.
$y = 12 + x$

II. $x = \frac{2y}{3}$

$\frac{3x}{2} = y$

$12 - x = \frac{3x}{2}$

$24 - 2x = 3x$ (105 §.)

$24 = 5x$

$4\frac{4}{5} = x$, oder es ist Nachm. 4 U. 48 Min.

$7\frac{1}{5} = y$. so viel ist es noch bis Mitternacht.

151. §.

151. §. Was für Zahlen sind es, wovon die Hälfte der ersten, und ein Drittel der zweiten, die Zahl 32 ausmachen; ein Viertel aber der ersten und ein Fünftel der zweiten zusammen 18 betragen?

Eine Zahl ist $= x$, ihre Hälfte $= \frac{x}{2}$, das

Viertel $= \frac{x}{4}$

Die andere $= y$, das Drittel $= \frac{y}{3}$, das

Fünftel $= \frac{y}{5}$

Die erste Gleichung ist

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 32$$

$$x + \frac{2y}{3} = 64 \quad (106\ §.)$$

$$3x + 2y = 192$$

$$2y = 192 - 3x$$

$$y = \frac{192 - 3x}{2}$$

Die

Die zweite Gleichung

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=18$$

$$x+\frac{4y}{5}=72$$

$$5x+4y=360$$

$$4y=384-6x;$$

weil oben $y=\frac{192-3x}{2}$ so ist

$$5x+384-6x=360$$

$$24-x=0$$

$$24=x$$

$$60=y,$$

weil $y=\frac{192-3x}{2}$

Die

Die Gleichungen $3x + 2y = 192$, $5x + 4y = 360$ können auch voneinander abgezogen werden. Soll aber y verschwinden, so muß die wechselseitige Vervielfältigung mit den Mitzählern von y zuvor geschehen;

$3x + 2y = 192$ mit 4 gibt $12x + 8y + 768$
$5x + 4y = 360$ mit 2 gibt $10x + 8y = 720$ abgez.

$$2x = 48$$
$$x = 24$$

$$3x + 2y = 192$$
$$y = \frac{192 - 3x}{2}$$

$$\frac{3x}{2} = 36$$

$$y = 96 - 36 = 60$$

Nun ist $\frac{24}{2} = 12$

$\frac{60}{3} = 20$

32 zusammen

Auch $\frac{24}{4} = 6$

$\frac{60}{5} = 12$

18 zusammen.

152. §. Ein Bruch wird in den Bruch $\frac{1}{3}$ verwandelt, wenn man 1 zum Zähler zählet; er wird aber $\frac{1}{4}$ werden: wenn der Nenner um 1 vermehret wird. Wie heißt dieser Bruch?

Dieser Bruch sei $= \frac{x}{y}$

So ist $\frac{x+1}{y} = \frac{1}{3}$

$$x+1 = \frac{y}{3}$$

$$x = \frac{y}{3} - 1$$

Es ist auch nach der zweiten Bedingung

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{y+1}{4}$$

$$x = \frac{y}{3} - 1$$

$$\frac{y}{3} - 1 = \frac{y+1}{4}$$

$$y - 3 = \frac{3y+3}{4}$$

$$4y - 12 = 3y + 3$$

$$y = 15$$

$x = 4$, weil oben $x = \frac{y}{3} - 1$

Der

Der gesuchte Bruch ist $\frac{4}{15}$, $\frac{4+1}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$$\frac{4}{15+1} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

153. §. Einige Mann haben eine gewisse Summe zu bezahlen; wären ihrer 3 mehr: so käme auf den Mann ein Thaler weniger. Wären ihrer aber 2 weniger: so müßte jeder einen Thaler mehr bezahlen. Wie viel Mann waren es, und wie viel mußte jeder bezahlen?

Mann waren $= x$, jeder bezahlet $= y$, alle zusammen $= xy$.

Sind ihrer 3 mehr: so macht das Mann $= x + 3$.

Diese bezahlen auch xy. Wie viel ein Mann? Antwort $\frac{xy}{x+3}$

Sind ihrer 2 weniger, so bezahlt jeder $\frac{xy}{x-2}$, und einen Thaler mehr, als da jeder y bezahlete. So ist.

$$\frac{xy}{x-2} = y + 1$$

$$xy = xy + x - 2y - 2$$

$$0 = x - 2y - 2$$

$$2y + 2 = x$$

Be-

Bezahlet ein Mann $\frac{xy}{x+3}$: so wäre es für einen Mann ein Thaler weniger. daher ist

$$\frac{xy}{x+3} = y - 1$$

$$xy = xy - x + 3y - 3$$

$$0 = -x + 3y - 3$$

$$x = 3y - 3$$

$$x = 2y + 2 \quad \text{abgezogen}$$

$$0 = y - 5 \quad \text{bleibt}$$

$$y = 5$$

$x - 12$ Mann und jeder bezahlt 5 Thl. alle aber 60. Wären nun 3 mehr, nämlich 15, so kämen auf den Mann nur 4 Thaler, wären aber 2 weniger, das ist 10: so mußte jeder 6 Thaler bezahlen.

154. §. Es sind zwei Zahlen zu errathen, nimmt man von der ersten 8 und zählet sie zur zweiten: so werden beide Zahlen eben groß. Nimmt man aber von der zweiten 10, und zähle sie zur ersten, so ist die erste 3 mal größer, als die zweite. Wie heißen diese Zahlen?

Die erste ist $= x$

Die zweite $= y$

Die erste gibt ab 8; so bleibt $x - 8$

Die

Die zweite bekömmt 8, so hat diese $y + 8$, und die Gleichung ist:

$$x - 8 = y + 8$$
$$x = y + 16$$

Die erste bekömmt 10, das gibt nun $x + 10$.

Die zweite gibt 10 ab, und behält $y - 10$. Nun ist erstere 3 mal größer; daher ist die Gleichung

$$x + 10 = 3y - 30$$
$$x = 3y - 40$$
$$y + 16 = 3y - 40$$
$$56 = 2y$$
$$28 = y$$
$$x = 28 + 16 = 44.$$

Aufgaben mit mehr Unbekannten.

155. §. Ihrer drei haben einen Gewinn folgender Gestalt zu theilen: A und B bekommen zusammen 200 Gulden; Der Gewinn von A und C beträgt 320 Gulden. Nehmen aber B und C ihr Geld zu sammen: so bringen sie 460 heraus. Wie viel hat jeder gewonnen?

Es gewinnet $A = x$

$B = y$

$C = z$

A und B haben zusammen 200: das gibt

$$x + y = 200$$

$$x = 200 - y$$

A und C haben 320: daraus entsteht

$$x + z = 320$$

An statt x seze man den Werth: so gibt sich

$$200 - y + z = 320$$

$$z = 120 + y$$

A und C haben 460: so ist $y + z = 460$

Darin seze man den Werth von z: es gibt

$$y + 120 + y = 460$$

$$2y = 340$$

$$y = 170$$

Folg.

Folglich $x = 200 - y = 200 - 170 = 30$
$z = 120 + y = 120 + 170 = 290$

So gewinnt $A = 30$
$B = 170$
$C = 290$

156. §. A, B und C reden von ihrem Vermögen. A spricht zu B und C: gebet mir die Hälfte von eurem Vermögen: so habe ich 170 Dukaten. Darauf verlangt B von A und C nur $\frac{1}{3}$ ihres Geldes, und hat dann 170 Dukaten. Endlich bringt C mit $\frac{1}{4}$ von beider Vermögen, schon, 170 Dukaten zusammen. Wie viel hatte jeder?

Es hatte $A = x$
$B = y$
$C = z$

A hat mit $\frac{1}{2}$ von B und C 170 Dukaten, so hat A, $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 170$

$$2x + y + z = 340 \quad (106\ §.)$$
$$z = 340 - 2x - y$$

B hat mit $\frac{1}{3}$ von A und C, 170, so hat B $y + \frac{x}{3} + \frac{z}{3} = 170$

$$3y + x + z = 510$$
$$x = 510 - 3y - z$$

Hier bringe man den Werth von z an; so bekömmt man

$$x = 510 - 3y - 340 + 2x + y$$
$$x = 170 - 3y + 2x + y$$
$$0 = 170 - 2y + x$$
$$2y - 170 = x$$

Endlich hat C mit $\frac{1}{4}$ der andern 170. Das gibt

$$z + \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 170$$
$$4z + x + y = 680$$

Hier bringe man den Werth von z und x an: so entsteht daraus

$$4(340 - 2x - y) + 2y - 170 + y = 680$$
$$1360 - 8x - 4y + 2y - 170 + y = 680$$
$$510 - y = 8x$$

Wieder den Werth von x gesezt gibt

$$510 - y = 16y - 1360$$
$$1870 = 17y$$
$$y = 110$$
$$x = 50$$
$$z = 130$$

Von

Von gleichem Schlage ist folgende Aufgabe: A verlangt von B und C 146 Thaler: so hat er 2 mal so viel, als sie behalten. B fordert eben diese Summe von A und C, alsdann hat er 3 mal so viel, als beide noch haben. Bekömmt aber C diese Summe von A und B: so wird C 4 mal so wiel haben, als beide noch behalten. Wie viel hat jeder?

157 §. Eine Zahl besteht ans 3 Ziffern, wovon die erste um etwas größer ist als die zweite, und die zweite um eben dieses Größer ist als die dritte. Vervielfältiget man die Summe dieser Ziffern mit 15: so ist dieser Inhalt so groß als die Zahl selbst. Zählet man aber 396 zu der verlangten Zahl: so wird die Summe eine Zahl sein, welche nur die Endziffern beiderseits verwechselt hat. Wie heist diese Zahl?

Die 3 Ziffern dieser Zahl sein x, y, z; soll aber x die Ziffer bedeuten, die auf der Hunderten Stelle, und y die, welche auf der Zehner Stelle steht: so ist diese 10 mal, und jene 100 mal größer. In dieser Lage wäre die verlangte Zahl $100x + 10y + z$. Die Summe der Ziffern ist $x + y + z$. Weil sie aus einer Unterschiedsreihe sind: so ist die erste Gleichung aus dieser Eigenschaft

$$x + z = 2y$$

$$z = 2y - x$$

Die zweite Gleichung ist

$15x + 15y + 15z = 100x + 10y + z$, darin seze man den Werth von z.

$15x + 15y + 30y - 15x = 100x + 10y + 2y - x$

$33y = 99x$

$y = 3x$

Die dritte Gleichung ist

$100x + 10y + z + 396 = 100z + 10y + x$, darin seze man auch den Werth von z.

$100x + 10y + 2y - x + 396 = 200y - 100x + 10y + x$

$198x + 396 = 198y$

$x + 2 = y$; darin seze man den obigen Werth von y

$x + 2 = 3x$

$2 = 2x$

$1 = x$

$y = 3$

$z = 5$ und die ganze Zahl ist 135.

Weil die Ziffern aus einer Unterschiedsreihe sind: so läßt sich die Aufgabe mit 2 Unbekannten lösen, wenn x die kleinste Ziffer ist und y die Steigzahl bedeutet, als

Die erste Ziffer $= x$

Die zweite $= x + y$

Die dritte $= x + 2y$

Die Zahl $= 100x + 10x + 10y + x + 2y$

$= 111x + 12y$ u. s. w.

158. §.

158. §. Von einem herrschaftlichen Speicher werden von vier Käufern um einerlei Preis etliche Malter Frucht gekaufet;

Der erste kauft	20	Malter	Korn	um 218 fl.
	30	—	Speltz	
	18	—	Haber	
	14	—	Gerste	
Der zweite	15	Malter	Korn	um 201 fl.
	24	—	Spelz	
	30	—	Haber	
	11	—	Gerste	
Der dritte	32	Malter	Korn	um 351 fl.
	40	—	Spelz	
	25	—	Haber	
	31	—	Gerste	
Der vierte	12	Malter	Korn	um 456 fl.
	10	—	Spelz	
	74	—	Haber	
	80	—	Gerste	

Nun wäre die Frage, wie der Malterpreis von jeder Gattung zu finden wäre?

Damit man sehe, daß es ganz willkürlich ist, die Unbekannten zu benennen: so wollen wir hier folgende Benennungen brauchen.

Das Malter Korn hat gekostet $= a$ fl.
Spelz $= b$
Haber $= c$
Gerste $= d$

Daraus entstehen folgende Gleichungen:

$$\text{I. } 20a + 30b + 18c + 14d = 218$$
$$\text{II. } 15a + 24b + 30c + 11d = 201$$
$$\text{III. } 32a + 40b + 25c + 31d = 351$$
$$\text{IV. } 12a + 10b + 74c + 80d = 456$$

Man ziehe eine Gleichung von der andern ab, um a aus den Gleichungen zu bringen (117 §.)

$$\text{I. } 20a + 30b + 18c + 14d = 218$$
$$10a + 15b + 9c + 7d = 109$$
$$.15$$
$$150a + 225b + 135c + 105d = 1635 \text{ Abz.}$$
$$\text{II. } 15c + 24b + 30c + 11d = 201$$
$$.10$$
$$150a + 240b + 300c + 110d = 2010$$

$$15b + 165c + 5d = 375$$
$$\text{V. } 3b + 33c + d = 75$$
$$\text{III. } 32a + 40b + 25c + 31d = 351$$
$$.6$$
$$192a + 240b + 150c + 186d = 2106 \text{ Abz.}$$
$$\text{IV. } 12a + 10b + 74c + 80d = 456$$
$$6a + 5b + 37c + 40d = 228$$
$$.32$$
$$192a + 160b + 1184c + 1280d = 7296$$

$$-80b + 1034c + 1094d = 5190$$
$$\text{VI. } -40b + 517c + 547d = 2595$$

Aus

Aus der ersten und IVten stose man auch a aus:

$$\text{I.}\quad 3.(10a + 15b + 9c + 7d = 109)$$
$$= 3.10a + 45b + 27c + 21d = 327.\ \text{Abz.}$$
$$\text{IV.}\quad 5.(6a + 5b + 37c + 40d = 228)$$
$$= 5.6a + 25b + 185c + 200d = 1140.$$
$$\text{VII.}\ -20b + 158c + 179d = 813$$

Aus der V und VI soll b durch zusammenziehen verschwinden, weil b nicht einerlei Zeichen hat.

$$\text{V.}\quad 40.(3b + 33c + d = 75)$$
$$= 3.40b + 1320c + 40d = 3000$$
$$\text{VI.}\quad 3.(-40b + 517c + 547d = 2595)$$
$$= -40.3b + 1551c + 1641d = 7785\ \text{zus.}$$
$$3\quad \text{VIII.}\ 2871c + 1681d = 10785$$

Gleichfalls aus V und VII, weil b darin kleine Zahlen hat.

$$\text{V.}\quad 20.(3b + 33c + d = 75)$$
$$= 20.3b + 660c + 20d = 1500$$
$$\text{VII.}\quad 3(-20b + 158c + 179d = 813)$$
$$= 3.-20b + 474c + 537d = 2439\ \text{zus.}$$
$$\text{IX.}\ 1134c + 557d = 3939$$

Aus der VIII und IX muß endlich c verschwinden.

$$\text{VIII.}\ 126.(2871c + 1681d = 10785)$$
$$= 126.2871c + 211806d = 1358910$$
$$\text{IX.}\ 319.(1134c + 557d = 3939)$$
$$= 319.1134c + 177683d = 1256541 \text{ abz.}$$
$$34123d = 102369$$
$$d = 3$$

Diesen Werth von d trage man in IX, und es wird für c die Zahl 2 herauskommen. Aus V findet man für b auch 2. Endlich wird aus I für a der Werth 4 gefunden. Demnach ist das Malter Korn um 4 fl.
Spelz - - 2
Haber -- 2
Gerste - - 3 verkaufet worden.

159. §. Nach vollendetem Baue verkauft ein Bauherr den noch übrigen Vorrath. Sein Nachbar A bekömmt davon

2 Karn Stein
3 — Kalch
7 — Sand für 34 fl.

b kauft 3 Karn Stein
4 — Kalch
12 — Sand für 46 fl.

c kauft

c Kauft 4 Karn Stein
1 — Kalch
13 — Sand für 42 fl.

Wie hoch kam der Karn von jeder Gattung zu stehen?

Der Karn Stein koste $= x$
Kalch — $= y$
Sand — $= z$

So entstehen folgende Gleichungen

I. $2x + 3y + 7z = 34$
II. $3x + 4y + 12z = 46$
III. $4x + y + 13z = 42$

Durch Abziehung soll in beiden ersten Gleichungen x verschwinden: sie werden zuvor wechselweise mit den Mitzählern von x vervielfältiget.

I. $3.(2x + 3y + 7z = 34)$
$= 6x + 9y + 21z = 102$
II. $2(3x + 4y + 12z = 46)$
$= 6x + 8y + 24z = 92$ Abzug.

IV. $y - 3z = 10$

Des=

Desgleichen

$$\text{II. } 4.(3x + 4y + 12z = 46)$$
$$= 12x + 16y + 48z = 184$$

$$\text{III. } 3.(4x + y + 13z = 42)$$
$$= 12x + 3y + 39z = 126 \quad \text{Abz.}$$

$$\text{V. } 13y + 9z = 58$$

Jezt soll z durch die Zusammenzählung verschwinden, weil z in IV und V mit verschiedenen Zeichen vorkömmt.

$$\text{IV. } 9.(y - 3z = 10)$$
$$= 9y - 27z = 90$$

$$\text{V } 3.(13y + 9z = 58)$$
$$= 39y + 27y = 174 \quad \text{zusammen}$$

$$48y = 264$$
$$2y = 11$$
$$y = \frac{11}{2} = 5\tfrac{1}{2}$$

In IV ist $y - 3z = 10$

$$\frac{11}{2} - 3z = 10$$
$$11 - 20 = 6z$$
$$-9 = 6z$$
$$z = -\tfrac{3}{2} = -1\tfrac{1}{2}$$

I. Gleichung $2x + 3y + 7z = 34$

$$2x + \frac{33}{2} - \frac{21}{2} = 34$$

$$x + \frac{33}{4} - \frac{21}{4} = 17$$

$$x = 14 \text{ fl.}$$

Gekostet hat demnach der Karn Stein = 14 fl.

Kalch = $5\frac{1}{2}$

Sand = $-1\frac{1}{2}$

Der Sand ist verneint ausgefallen, und bedeutet, daß der Bauherr dafür nichts bekommen habe, sondern im Gegentheile so viel habe geben müssen, denselben hinwegzuführen.

Von Gleichungen, worin die Unbekannte eine Würde ist.

160. §. Wenn die Unbekannte eine Würde ist: so muß man auf beiden Seiten die Wurzel ausziehen, welche durch den Würdezeiger angedeutet wird, weil gleiche Inhalte gleiche Wurzeln haben.

$x^2 = a^2$	$x^2 = a$	$x^3 = 27$
$x = a$	$x = \sqrt{a}$	$x = 3$
	oder $x = a^{1:2}$	

161. §. Hat die Unbekannte in der Würde noch andere Zahlen bey sich: so bringt man diese zuvor fort, es sei dann, daß man auch aus diesen die Wurzel finden könne.

$2x^3 = 128$	$\frac{x^3}{3} = 9$	$4x^2 = 25$	$ax^4 = 27$
$x^3 = 64$	$x^3 = 27$	$2x = 5$	$x^4 = \frac{27}{a}$
$x = 4$	$x = 3$	$x = \frac{5}{2}$	$x = \sqrt[4]{\frac{27}{a}}$

162. §. Die Wurzeln von höhern Würden lassen sich durch wiederholtes Ausziehen der Vierecks- und Würfelwurzel finden

$x^4 = 4096$	$x^6 = 4096$	$x^6 = 4096$
$x^2 = 64$	$x^3 = 64$	$x^2 = 16$
$x = 8$	$x = 4$	$x = 4$

Im ersten Muster wird die Viereckswurzel 2 mal gesuchet, im zweiten wird erst die Viereckswurzel gesuchet, die aber ein Würfel ist, wovon man die Wurzel suchet, im dritten suchet man erst die Würfelwurzel, die ein Viereck ist, wozu man alsdann die gehörige Wurzel findet. Hier merke man sich, daß man alsdann Vierecks- oder Würfelwurzeln suchen könne, wenn die Würdezeiger mit 2 oder 3 theilbar sind. Andere Würden finden sich so leicht nicht.

163. §. Alle diese Wurzeln kann man allgemein durch Verhältnißzahlen (Logarithmen) finden (Rech. 259 §.); weil sie die Wurzelausziehung in eine Theilung, und die Würden durch die Vervielfältigung geben. Z. B. sei $x^6 = 4096$, die Verhältnißzahl bemerke man durch Vorsezung des Buchstaben l: so wird aus dieser Gleichung:

$$6lx = l4096$$

$$lx = \frac{l4096}{6}$$

Nun suche man die Verhältnißzahl von 4096; sie ist 3. 612360, und theile diese mit 6, und es wird 0. 602060 daraus, welche die

die Verhältnißzahl von x ist, die zur Zahl 4 gehört. x ist nun $= 4$.

Es sei $2^x = a$ $x l 2 = l a$ $x = \frac{l a}{l 2}$	D. i. Wenn die Zahl 2 zu einer unbekannten Würde erhoben wird: so ist sie so groß als a. Man soll diese Würde finden.

Aufgaben mit einer Unbekannten in Würden.

164. §. Ein Oberster stellet seine Soldaten in ein Viereck von so viel Gliedern, als Soldaten im ersten Gliede stehen, und da bleiben ihm 284 Mann übrig. Darauf stellet er in jedes Glied einen Mann mehr, und macht auch ein Glied mehr, und dazu hat er 25 Mann zu wenig. Wie viel hatte er?

Er habe das erstemal in jedem Gliede x Mann: so ist das Viereck davon $= xx$. Es bleiben noch 284 Mann übrig; folglich hatte er in allem $x^2 + 284$.

Er stellet einen Mann mehr in das Glied: so sind $x + 1$ Mann darin, das Viereck davon ist $x^2 + 2x + 1$, dazu fehleten aber noch 25 Mann. Er hatte also $x^2 + 2x + 1 - 25$ Mann.

Weil aber so wohl x^2+284, als $x^2+2x-24$ dieselbige Anzahl Soldaten ausmachet: so folget die Gleichung

$$x^2 + 284 = x^2 + 2x - 24$$
$$x^2 + 308 = x^2 + 2x$$
$$308 = 2x$$
$$154 = x$$

Es stunden im ersten Gliede 154 Mann, und im ganzen Vierecke 23716, und 284 waren noch übrig, folglich waren in allem 24000 Mann. Wären in einem Gliede 155 Mann: so gäbe das ganze Viereck 24025, nämlich 25 mehr, als 24000.

165. §. Ein Faß hält 81 Mas Wein, davon zapfet man etliche Mase, und füllet das Faß wieder mit Wasser auf. Darauf zapfet man wieder so viel ab, wie zuvor, füllet auch wieder mit Wasser auf. Dieses Zapfen geschieht 4 mal, da dann nur noch 16 Mas Wein im Fasse sind, das übrige aber Wasser ist. Wie viel ist jedesmal abgezapfet worden?

Der Wein, der nach dem ersten Zapfen übrig bleibt, sei $= x$.

Dazu wird Wasser gegossen, und man zapfet wieder eben viel ab. Nun bleibet Wasser und Wein übrig; wie sich der Wein dieses Ueberschußes, zum Weine des ersten Ueberschus-

ses verhalte, oder wie viel Wein noch im zweiten Ueberschusse sei: dieses findet sich auf diese Art.

Von 81 Mas Wein bleiben x Mas Wein übrig, wie viel bleibt von x Mas Wein übrig, da nach dem ersten Auffüllen nur x Wein im Fasse ist? Es kömmt daraus $\frac{x^2}{81}$. Wird zum 2ten Mal aufgefüllet: so ist im Fasse an Wein nichts, als $\frac{x^2}{81}$, wie viel wird davon beim 3ten Zapfen übrig bleiben?

Von 81 Mas Wein bleibt x übrig; wie viel von $\frac{x^2}{81}$? Antw. $\frac{x^3}{81^2}$.

Wird zum 3ten mal aufgefüllet: so sind im Fasse an Wein $\frac{x^3}{81^2}$ Mas; wie viel wird davon beim 4ten Zapfen übrig bleiben?

Von 81 Mas Wein bleiben x Mas übrig, wie viel von $\frac{x^3}{81^2}$?

Antw. $\frac{x^4}{81^3}$ Mas Wein sind noch übrig. Es heist aber: bey dem vierten Zapfen sein

16 Mas übrig geblieben: daher entstehet diese Gleichung:

$$\frac{x^4}{81^3} = 16$$

$x^4 = 16 . 81^3$, jeden Inhalt zerlege man in seine Theiler:

$81^3 = 81.81.81 = 9^2.9^2.9^2$, und $16 = 4^2$,

$x^4 = 4^2.9^2.9^2.9^2$

x^4 ist ein Viereck, wovon x^2 die Wurzel ist.

So ist $x^2 = 4.9.9.9$

$x = 2.3.3.3$

$x = 54.$

Welche nach dem ersten Abzapfen übrig geblieben sind. Weil nun 81 Mas darin waren: so sind 27 abgezapfet worden.

Wird das Faß mit Wasser aufgefüllet: so sind darin 54 Mas Wein und 27 Mas Wasser. Bei dem zweiten Abzapfen fließen demnach 27 Mas Wasser und Wein zugleich heraus, und es bleiben 54 Mas Wasser und Wein übrig. Wie viel Wein aber in 54 Mas sind, findet sich so: da 81 Mas Wein im Fasse waren: blieben 54 Mas Wein übrig; es sind aber nur 54 Mas Wein im Fasse: wie viel bleibt

dann beim Abzapfen übrig? Antw. 36 Mas sind übrig. Nun sezet man weiter:

81 : 54 = 36? Antw. 24 Mas sind übrig.
81 : 54 = 24? Antw. 16 Mas sind bei dem vierten Abzapfen übrig.

166. §. Nennet man das Abgezapfte $= x$, so ist der Ueberschuß $= 81 - x$, damit verfährt man, wie oben mit x.

1. Abzapf bleibt $81 - x$

2. $\frac{(81 - x)^2}{81}$

3. $\frac{(81 - x)^3}{81^2}$

4. $\frac{(81 - x)^4}{81^3}$

$$\frac{(81-x)^4}{81^3} = 16$$

$$(81-x)^4 = 16.\ 81^3$$

$$(81-x)^4 = (81-x)^2.\ (81-x2)^2$$

$$(81-x)^2.\ (81-x)^2 = 4^2.9^2.9^2.9^2,$$

von beiden ist die Wurzel:

$(81-x)^2 = 4.9.9.9$, davon ist wieder die Viereckswurzel:

$$81 - x = 54$$

$$81 - 54 = x$$

$$27 = x$$

Be-

Betrachtet man die Gleichung $\frac{x^4}{81^3} = 16$: so sieht man, daß x zum Würdezeiger 4 habe; 4 mal ist auch gezapfet worden. 81 hat 3 zum Würdezeiger, es ist auch 3 mal aufgefüllet wor- worden, einmal weniger als gezapfet worden. Diese Gleichung kann demnach für alle dergleichen Aufgaben gelten, wenn man die Zahlen verändert.

Mit Verhältnißzahlen löset sich $\frac{x^4}{81^3} = 16$ noch leichter. Die Verhältniß Zahl von x sei $= lx$: so ist sie von $x^4 = 4\,lx$

von $81 = l\,81$: von $81^3 = 3\,l\,81$

$$\left.\begin{array}{l} \text{von } 16 = l\,16 \\ x^4 = 16.\,81^3 \\ 4\,lx = l\,16 + 3\,l\,81 \\ lx = \dfrac{l\,16 + 3\,l\,81}{4} \end{array}\right\}$$

Das ist: Die Verhältnißzahl von 16, und die 3 fache Verhältnißzahl von 81 wird mit 4 getheilet: so bleibt die Verhältnißzahl von x übrig; diese wird aufgeschlagen und den Werth von x zeigen.

167. §. Drei haben eine gewisse Summe gewonnen. Wenn der erste 3 Gulden bekömmt: so bekömmt der zweite 5. Zieht aber der zweite 4: so zieht der dritte 7. Wird benebens das Geld des ersten mit dem Gelde des zweiten, das Geld des zweiten mit dem Gelde des dritten,

und das Geld des dritten mit dem Gelde des ersten vervielfältiget: so machet die Summe dieser Inhalte 1360. Wie viel hat jeder gewonnen?

Es hat der erste $= x$
der zweite $= y$
der dritte $= z$

Nimmt der erste 3, so nimmt der zweite 5; das gibt:

$$\text{I.}\quad x : y = 3 : 5$$
$$3y = 5x$$
$$\frac{3y}{5} = x$$

Nimmt der zweite 4: so ziehet der dritte 7:

$$\text{II.}\quad y : z = 4 : 7$$
$$4z = 7y$$
$$z = \frac{7y}{4}$$

Aus den drei Inhalten wird die dritte Gleichung:

$$\text{III.}\quad xy + yz + xz = 1360$$
$$\frac{3y^2}{5} + \frac{7y^2}{4} + \frac{3.7y^2}{4.5} = 1360$$
$$\frac{3.4y^2 + 5.7y^2 + 3.7y^2}{4.5} = 1360.$$

$3.4y^2$

$$3 \cdot 4y^2 + 5 \cdot 7y^2 + 3 \cdot 7y^2 = 4 \cdot 5 \cdot 1360$$

$$y^2 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 1360}{3 \cdot 4 + 5 \cdot 7 + 3 \cdot 7}$$

$$y^2 = \frac{4 \cdot 6800}{68}$$

$$y^2 = 400$$

$$y = 20$$

$$x = \frac{3y}{5} = 12$$

$$z = \frac{7y}{4} = 35.$$

168. §. Es denket sich jemand eine Zahl, der Inhalt aus $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ derselben macht 240. Wie heist diese Zahl?

Diese Zahl ist = x, und die Gleichung:

$$\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{5} = 240$$

$$x^2 = 15 \cdot 240$$

$$x^2 = 3600$$

$$x = 60$$

$$\frac{x}{3} = 20$$

$$\frac{x}{5} = 12$$

$$\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{5} = 240$$

169. §. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ von einer gewissen Zahl werden mit einander vervielfältiget, und geben zum Inhalte 17714700. Wie heist diese Zahl?

Diese Zahl sei = x: so ist die Gleichung

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{5} = 17714700$$

$$\frac{x^3}{30} = 17714700$$

$$x^3 = 531441000$$

$$x = 810$$

$$\frac{x}{2} = 405$$

$$\frac{x}{3} = 270$$

$$\frac{x}{5} = 162.$$

170. §. Ihrer etliche sezen jeder 10 mal so viel zusammen, als ihrer sind, und gewinnen mit 100 fünfmal so viel, als ihrer sind. Der ganze Gewinn beträgt 108 Thaler. Wie viel waren ihrer?

Ihrer waren = x, davon sezet jeder = 10x, alle zusammen = $10x^2$.

Da

Da 100 aber $5x$ gewinnt: so gewinnt die ganze Summe $10x^3$, in allem $= \frac{x^3}{2}$: die Gleichung ist

$$\frac{x^3}{2} = 108$$

$$x^3 = 216$$

$$x = 6$$

171. §. Man suche eine Zahl, wovon $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ den Inhalt von 108000 geben.

Diese Zahl ist $= x$

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{x}{5} = 108000$$

$$\frac{x^4}{120} = 108000$$

$$x^4 = 12960000$$

$$x = 60$$

Weil $x^4 = x^2 \cdot x^2$: so löset sich auch die Gleichung auf diese Art:

$x^4 = 12960000$, die Viereckswurzel aus beiden

$x^2 = 3600$

$x = 60$

172. §. In diesen und dergleichen Aufgaben von Zahlen kann der Werth der Unbekannten auch verneint werden; weil die Wurzel von x^2, $+x$, oder $-x$ ausfallen kann, indem so wohl $+x, +x$ den Inhalt x^2 gibt als $-x. -x$.

Von vermischten Vierecksgleichungen.

173. §. Wenn neben dem Vierecke der Unbekannten in der Gleichung auch noch die Wurzel derselben vorkömmt: so gibt dieses eine vermischte Vierecksgleichung z. B.

$$x^2 + 4x = a, \quad x^2 - ax = b.$$

174 §. Es ist bekannt, daß ein Viereck einer zweigliedrigen Wurzel drei Glieder enthält, nämlich das Viereck eines Wurzelgliedes, den zweifachen Inhalt beider Wurzelglieder, und das Viereck des zweiten Gliedes. In Buchstaben sind diese Theile recht kennbar.

$a + b$ Wurzel.	$x - 3$ Wurzel.
$a + b$	$x - 3$
$a^2 + ab$	$x^2 - 3x$
$+ ab + b^2$	$- 3x + 9$
Viereck $a^2 + 2ab + b^2$	Viereck $x^2 - 6x + 9$

175. §. In $a^2 + 2ab + b^2$ ist a^2 das Viereck von a, 2ab ist der zweifache Inhalt

von

von ab, und b^2 ist das Viereck von b. Der zweifache Inhalt kann verschiedentlich zerleget werden, nämlich 2a . b, oder a, 2b, d. i. Das zweifache a ist mit b, oder a ist mit dem zweifachen b vervielfältiget.

176. §. In $a^2 + 2ab + b^2$ ist es sehr leicht die Wurzel zu finden. In dem ersten Gliede a^2 und b^2 erhellet dieselbe schon vor sich. Aus $a^2 + 2ab$ läßt sich dieselbe auch leicht finden; aus a^2 findet man a, und aus 2ab wird b gefunden, wenn man 2ab mit dem zweifachen a theilet.

Man kann deswegen aus dem ersten und zweiten Gliede die andere Wurzel finden, und das mangelhafte Viereck ergänzen: so wird $a^2 + 2ab$ ergänzet, wenn man 2ab mit dem zweifachen a theilet, und das dadurch gefundene b zum Vierecke macht, und dazu schreibt; das vollständige Viereck ist $a^2 + 2ab + b^2$.

177. §. **Eine mangelhafte Gleichung ergänzen.** Das zweite Glied, nämlich worin x als Wurzel ist, wird mit x getheilet, die Hälfte des Antheiles wird zum Vierecke gemacht, und auf beiden Seiten in die Gleichung gebracht. Oder man nehme die Hälfte des Mitzählers von x, mache diese zum Vierecke

ecke, und trage es mit + beiderseits in die Gleichung.

$x^2 + 2ax = b$	$x^2 + 2ax = b$
$\frac{2ax = 2a}{x}$	Mitzähler von $x = 2a$
Die Hälfte $= a$	Die Hälfte $= a$
Viereck $= a^2$	Das Viereck $= a^2$
Ergänzt $x^2 + 2ax + a^2 = b + a^2$	erg. $x^2 + 2ax + a^2 = b + a^2$

Die Richtigkeit der Ergänzung ist offenbar. Denn es mangelt nur das Viereck a^2. Die Wurzeln sind beide in $2ax$; eine davon ist x: so wird der Theil $2a$ die zweifache andere sein. Demnach ist die Hälfte von $2a = a$ die zweite Wurzel, dessen Viereck mit + beiderseits zugesezet wird; weil das Viereck immer + hat, die Wurzel mag + oder — haben. Es muß aber deswegen beiderseits angesezet werden, damit die Gleichung unverlezet bleibe. Wenn nun $x^2 + 2ax = b$: so ist $x^2 + 2ax + a^2$ nicht mehr b gleich; weil noch a^2 dazugekommen ist. Kömmt nun auch a^2 zu b so ist wieder alles gleich, nämlich $x^2 + 2ax + a^2 = b + a^2$.

178. §. Die Mitzähler der Unbekannten mögen nun sein, was sie wollen: so muß man ihre Hälfte zum Vierecke machen, das Mangelhafte

hafte zu ergänzen. Alle mögliche Verschiedenheiten sollen hier angeführet werden.

I. $x^2 - 2ax = b$

Mitzähler von $x = 2a$

Hälfte davon $= a$

Viereck $= a^2$

Ergänzt $x^2 - 2ax + a^2 = b + a^2$

II. $x^2 + ax = b$

Mitzähler von $x = a$

Hälfte davon $= \frac{a}{2}$

Viereck $= \frac{a^2}{4}$

Ergänzt $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$

III. $x^2 - 6x = 16$

Mitzähl. von $x = 6$

Hälfte davon $= 3$

Viereck $= 9$

Ergänzt $x^2 - 6x + 9 = 16 + 9$

IV.

IV. $x^2 - 7x = 18$

Mitzähler von $x = 7$

Hälfte davon $= \frac{7}{2}$

Viereck $= \frac{49}{4}$

Ergänzt $x^2 - 7x + \frac{49}{4} = 18 + \frac{49}{4}$

V. $x^2 + x = 56$

Mitzähl. von $x = 1$

Hälfte davon $= \frac{1}{2}$

Viereck $= \frac{1}{4}$

Ergänzt $x^2 + x + \frac{1}{4} = 56 + \frac{1}{4}$

VI. $5x^2 - 4x = 33$

$x^2 - \frac{4x}{5} = \frac{33}{5}$

Mitzähl. von $x = \frac{4}{5}$

Hälfte davon $= \frac{2}{5}$

Viereck $= \frac{4}{25}$

Ergänzt $x^2 - \frac{4x}{5} + \frac{4}{25} = \frac{33}{5} + \frac{4}{25}$

179. §.

179. §. So bald das Viereck ergänzet ist: so zieht man aus beiden Theilen die Wurzel aus, und findet endlich den Werth von x. Z. B.

$$x^2 - 2ax = b$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = b + a^2$$

$$x - a = \sqrt{(b + a^2)}$$

$$x = \sqrt{(b + a^2)} - a$$

180. §. Auf der Seite der Unbekannten ist die Wurzel leicht zu finden, indem sie in x^2 und a^2 schon ist. Von x^2 weiß man, daß sie x ist; von dem Zusatze ist es der halbe Zähler; weil der zum Vierecke gemacht worden ist. Man braucht demnach aus diesem Theile die Wurzel nicht nach der gewöhnlichen Regel zu suchen. Der andere Theil der Gleichung macht mehr Beschwerniß, da er nicht immer ein ein vollständiges Viereck ist, wie $b + a^2$. Man zeigt demnach die Wurzel nur an, $\sqrt{(b + a^2)}$.

181. §. Wenn der andere Theil der Gleichung in Ziffern gegeben ist: so nimmt man die Summe oder den Unterschied der Zahlen, nachdem die Zeichen sind, und zieht daraus die Wurzel. Ist der Zusatz

ein

ein Bruch; so versteht es sich, daß man die andere Zahl auch zum Bruche machen müsse. Z. B.

I. $x^2 - 7x = 8$

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = 8 + \frac{49}{4}$$

$$= \frac{32}{4} + \frac{49}{4}$$

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \frac{81}{4}$$

Wurz. $x - \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$

$$x = \frac{9}{2} + \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{16}{2}$$

$$x = 8$$

II.

II. $x^2 - 6x = 27$

$$x^2 - 6x + 9 = 27 + 9$$

$$= 36$$

$$x - 3 = 6$$

$$x = 9.$$

III. $x^2 + x = 110$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 110 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{441}{4}$$

Wurzel $x + \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$

$$x = \frac{20}{2} = 10$$

182. §. Wenn das zweite Glied der unreinen Gleichung das Zeichen — hat: so hat auch die Wurzel des Zusazes, oder der halbe Zähler von x das Zeichen —, wie man im ersten und

dritten Beispiele gesehen hat. Es kann auch die Wurzel des Zusazes + bekommen, alsdann hat x das Zeichen —: denn $x - 3$ und $-x + 3$ haben einerlei Viereck, nämlich $x^2 - 6x + 9$.

183. §. In allen Mustern hat man immer x^2 ohne einigen Zähler ganz rein gehabt. Käme nun in einer Gleichung x^2 mit einem Zähler vor: so müßte dieser durch die Theilung hinweggeschaft werden. Z. B.

$$5x^2 - 4x = 33$$

$$x^2 - \frac{4x}{5} = \frac{33}{5}$$

$$x^2 - \frac{4x}{5} + \frac{4}{25} = \frac{33}{5} + \frac{4}{25}$$

$$= \frac{165}{25} + \frac{4}{25}$$

$$x^2 - \frac{4x}{5} + \frac{4}{25} = \frac{169}{25}$$

$$x - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}$$

$$x = \frac{13}{5} + \frac{2}{5} = \frac{15}{5}$$

$$x = 3$$

184 §. Verlangt man zu mangelhaften Viereckßgleichungen ein allgemeines Muster: so sei folgende Gleichung.

$x^2 \pm ax = b$. Hier hat ax beide Zeichen, weil es bald +, bald − hat

$$x^2 \pm ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 \pm \frac{a}{2} = \sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)}$$

$$x \pm \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{(4b + a^2)}{4}}$$

$$x \pm \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(4b + a^2)}$$

$$x = \mp \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4b + a^2)}$$

$\mp$ bedeuten, daß $\frac{a}{2}$ nach Angabe der Gleichung + oder − habe, welches man in der Arbeit zu bemerken hat. Die Gröse mit dem Wurzelzeichen hat auch $\pm$; weil die Viereckswurzel + oder − haben kann.

Aufgaben in vermischten Vierecksgleichungen.

185. §. Ein Pferd wird um 24 Thaler verkaufet; dabei wird so viel am Hundert verloren, als das Pferd gekostet hat. Wie viel hat das Pferd gekostet?

Das Pferd hat gekostet = x Thl., es wird um 24 verkaufet: so ist der Verlust = x — 24.

Es wird auch an 100, x verloren; wie viel an x?

Antw. $\frac{x^2}{100}$

Daher entsteht die Gleichung:

$$\frac{x^2}{100} = x - 24$$

$$2^2 = 100x - 2400$$

$$x^2 - 100x = -2400$$

Ergänz. 178 §.

$$x^2 - 100x + 50^2 = 2500 - 2400$$

$$x - 50 = \sqrt{100}$$

$$x = 50 + 10 = 60$$

Das Pferd hat 60 Thaler gekostet, und daran sind 36 verloren gegangen, das macht 60 von 100.

Soll

Soll $x^2 = 100x - 2400$ nach der Formel (184 §.) aufgelöset werden: so ist $100 = a$, und $b = -2400$. Die lezte Gleichung ist

$$x = \frac{100}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(4.-2400 + 100^2)}$$

$$x = 50 + 10$$

$$x = 60$$

186. §. Es werden zwei Zahlen gesuchet, deren Summe so gros ist, als beider Inhalt. Ihre Summe, und die Summe ihrer Vierecke machen zusammen $58\frac{19}{36}$

Die Summe beider Zahlen sei $= 2x$

Ihr Unterschied $= 2y$

So ist die grose Zahl $= x + y$ (142 §.)

Die kleine $= x - y$

ihr Inhalt $(x+y).(x-y) = x^2 - y^2$

Nach den Bedingungen ist die erste Gleichung,

I. $2x = x^2 - y^2$

$y^2 = x^2 - 2x$

Die zweite Gleichung ist

$$\text{II. } 2x^2 + 2y^2 + 2x = 58\frac{19}{36} = \frac{2107}{36}$$

$$x^2 + y^2 + x = \frac{2107}{36.\,2}$$

$$y^2 = x^2 - 2x \text{ aus der ersten}$$

$$x^2 + x^2 - 2x + x = \frac{2107}{36.2}$$

$$2x^2 - x = \frac{2107}{36.2}$$

$$x^2 - \frac{x}{2} = \frac{2107}{36.2.2.}$$

$$x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = \frac{2107}{36.2.2} + \frac{1}{16} \text{ (178 §).}$$

$$x - \frac{1}{4} = \frac{46}{12}, \text{ die grose Zahl } x + y = 7$$

$$x = \frac{49}{12}, \text{ die kleine Zahl } x - y = \frac{7}{6}$$

$$y = \frac{35}{12}$$

Nennet man bei der Auflösung die grose Zahl $= x$, und die Kleine $= y$: so geräth man

man auf eine Gleichung von höhern Graden, wozu die Gründe noch fehlen.

187 §. Es sollen zwei Zahlen gesuchet werden, deren Inhalt 272 gibt; die Summe aber ihrer Vierecke = 1220.

Beide Zahlen sind = 2x, ihr Unterschied = 2y

Die grose Zahl = $x + y$, die kleine $x - y$

Die erste Gleichung ist

I. $x^2 - y^2 = 272$

$x^2 = 272 + y^2$

Die zweite $2x^2 + 2y^2 = 1220$

$x^2 + y^2 = 610$

$x^2 = 272 + y^2$ aus der ersten Gleichung.

$272 + 2y^2 = 610$

$y^2 = 169$

$y = 13$, die grose Zahl $x + y = 34$

$y = 21$, die kleine $x - y = 8$

188. Man finde zwei Zahlen, daß der Inhalt aus ihrem Unterschiede und dem Unterschiede ihrer Vierecke 320 gebe. Wird aber ihre Summe mit der Summe ihrer Vierecke vervielfältiget: so bekömmt man 4160.

Beide Zahlen sein = 2x

Ihr Unterschied = 2y

So ist eine Zahl $= x + y$
Die andere $= x - y$

Die erste Gleichung $4x^3 + 4xy^2 = 4160$
$x^3 + xy^2 = 1040$

Die zweite Gleichung $8xy^2 = 320$
$xy^2 = 40$

$$x^3 + 40 = 1040$$
$$x^3 = 1000$$
$$x = 10$$
$$y = 2$$

So ist eine Zahl $x + y = 12$
Die andere $x + y = 8$

189. §. Wird die Summe, der Unterschied, und die Summe der Vierecke von zwei Zahlen gegeben; wie auch die Summe der beiden Zahlen samt der Summe ihrer Vierecke: so lassen sich auch die Zahlen selbst finden.

Wenn die Summe von zwei Zahlen zum Inhalte derselben gezählet, aber die Summe derselben von der Summe der Vierecke abgezogen wird: so kann man auch beide Zahlen finden, wenn besagte Summe und Unterschied gegeben werden.

190. §. Es legen 2 Kaufleute ihr Geld zusammen, der erste läßt seine Einlage 9 Monate in der Handlung, nach welcher Zeit er für seine

Einlage und seinen Gewinn 124 fl. bekömmt; der zweite hat 300 fl. beigeschossen, die aber 12 Monate lang in der Handlung waren; beide zusammen haben 120 fl. gewonnen. Wie gros war der Einsaz des ersten und der Gewinn des zweiten?

Der erste hat eingesezt $= x$, 9 M. lang.
Der zweite $= 300$, 12 M. lang.

Nach der Gesellschaftsregel suche man des ersten Gewinn.

x, 9	9x
300, 12	3600

$9x + 3600 : 120 = 9x$

$\dfrac{120}{x+400}$ Gewinn des ersten.

Dieser soll mit dem Einsaze 124 fl. ausmachen.

Deßwegen entsteht diese Gleichung.

$$\frac{120x}{x+400} + x = 124$$

$$120x + x^2 + 400x = 124x + 49600$$

$$x^2 + 396x = 49600$$

$$x^2 + 396x + 39204 = 88804 \text{ (178 §.)}$$

$x = 100$ war der Eins.
und 24 der Gewinn

191 §. Eine Gesellschaft hat 144 Thaler zu bezahlen. Zwei davon sind auser Stand gesezet worden zu bezahlen, welches gemacht, daß jeder von den andern einen Thaler mehr bezahlen muß. Wie viel waren ihrer?

Ihrer waren $= x$,

bezahlen alle: so macht es für jeden $\frac{144}{x}$

Denn x bezahlet 144, wie viel 1?

Zwei bezahlen nicht: so bezahlen nur $x - 2$,

Alsdann bezahlet jeder davon $\frac{144}{x - 2}$

Denn $x - 2$ bezahlet 144, wie viel 1?

Die zweite Bezahlung ist für jeden um einen Thaler gröser, als die erste. Daraus entsteht diese Gleichung:

$$\frac{144 + 1}{x} = \frac{144}{x - 2}$$

$$144 + x = \frac{144x}{x - 2}$$

$$144x + x^2 - 288 - 2x = 144x$$

$$x^2 - 2x = 288$$

$$x^2 - 2x + 1 = 289 \text{ (178 §.)}$$

$$x - 1 = 17$$

$$x = 18$$

Die

Die Gesellschaft bestund aus 18 Personen, wovon jede 8 Thaler bezahlen sollte: Weil aber 2 abgiengen: so mußte jede 9 Thaler bezahlen.

192. §. Ein Kaufmann kaufet für 675 Gulden Leinwand, das Stück verkaufet er um 48 Gulden, und gewinnt bei diesem Handel so viel, als ihn ein Stück gekostet hat. Wie viel ist für ein Stück bezahlet worden?

Das Stück kostet eingekauft $= x$

Es wird um 48 Gulden verkaufet; demnach ist Gewinn an einem Stücke $= 48 - x$

Der Gewinn von allen Stücken $= \frac{32400 - 675x}{x}$

Denn man gewinnt mit x Gulden $48 - x$; wie viel mit 675?

Dieser ganze Gewinn beträgt so viel, als jedes Stück gekostet hat: so gibt sich diese Gleichung.

$$x = \frac{32400 - 675x}{x}$$

$$x^2 + 32400x - 675x$$

$$x^2 + 675x = 32400$$

$$x^2 + 675x + \frac{455625}{4} = 32400 + \frac{455625}{4}$$

(178 §). $$= \frac{585225}{4}$$

$$x + \frac{675}{2} = \frac{765}{2}$$

$x = 45$ hat das Stück beim Einkaufe gekostet.

193. §. Ein Kaufmann verkaufet ein spanisches Rohr um 24 Dukaten. Am Hundert gewinnt er so viel, als ihn das Rohr gekostet hat; wie viel hat er dafür gegeben?

Das Rohr kostet $= x$ Dukaten,

Der Gewinn davon $= 24 - x$

Der Gewinn am Hundert $= \frac{2400 - 100x}{x}$,

Denn an x ist der Gewinn $24 - x$; wie an 100?

Dieser Gewinn ist so gros, als x, demnach ist

$$x = \frac{2400 - 100x}{x}$$

$$x^2 = 2400 - 100x$$

$$x^2 + 100x = 2400$$

$$x^2 + 100x + 2500 = 4900 \text{ (178 §.)}$$

$$x + 50 = 70$$

$$x = 20$$

194. §. Es werden 2 Zahlen gesuchet, deren Inhalt $= 105$, die Summe ihrer Vierecke $= 274$.

Eine ist x, die andere y, die Gleichungen sind

$$\text{I.} \quad xy = 105,$$

$$y = \frac{105}{x}$$

II.

II. $x^2 + y^2 = 274$

$y^2 = \frac{105^2}{x^2}$ aus der ersten Gleichung.

$x^2 = \frac{105^2}{x^2} = 274$

$x^4 + 105^2 = 274x^2$

$x^4 - 274x^2 = -105^2$

$105^2 = 11025$

$x^4 - 274x^2 = -11025$ (178 §.)

$x^4 - 274x^2 + 137^2 = 137^2 - 15025$

$137^2 = 18769$

-11025

7744

$x^4 - 274x^2 + 137^2 = 7744$

$x^2 - 137 = 88$

$x^2 = 225$

$x = 15$

$y = 7$

195. §. Es werden 2 Zahlen gesuchet, deren Inhalt = 60, der Unterschied ihrer Vierecke = 64.

Eine ist = x, die andere = y, die Gleichungen sind:

I. $xy = 60$

$y = \frac{60}{x}$

II.

II.) $x^2 - y^2 = 64$

$$y^2 = \frac{60^2}{x} \text{ aus der ersten Gl.}$$

$$x^2 - \frac{60^2}{x^2} = 64$$

$$x^4 - 60^2 = 64x^2$$

$$x^4 - 64x^2 = 60^2$$

$$60^2 = 3600$$

$$x^4 - 64x^2 + 32^2 = 4624 \quad (178 §.)$$

$$x^2 - 32 = 68$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10$$

$$y = 6$$

196. §. Es sind etliche Kinder zusammen 42 Jahre alt, davon jedes 2 Jahr älter ist, als das andere. Das zweite und vierte sind zusammen 12 Jahr alt. Wie alt war jedes Kind, und wie viel Kinder waren es?

Die Zahl der Kinder war $= y$
Das Alter des ersten $= x$
Das Alter des zweiten $= x + 2$
Das Alter des vierten $= x + 6$
Beider zusammen $= 2x + 8$

Diese sind 12 Jahr alt, $2x + 8 = 12$

$$x = 6 - 4$$

$x = 2$, das Al-

Das

Das Alter des lezten $= x + 2y - 2$

alle zusammen $\frac{-2xy + 2y^2 - 2y}{2}$ (Rech. 200 §)

In allem sind sie 42 Jahr alt,

$$\frac{2xy + 2y^2 - 2y}{2} = 42$$

$$xy + y^2 - y = 42$$

$$y = 2$$

$$2y - y + y^2 = 42$$

$$y + y^2 = 42$$

$$y + y^2 + \frac{1}{4} = \frac{169}{4}$$

$$y + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$

$$y = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}$$

$y = 6$ die Summe aller Kinder.

197. §. Etliche Spieler gewinnen 80 Gulden. Wären ihrer 4 mehr gewesen: so hätte jeder auch einen Gulden weniger bekommen: Wie viel Spieler waren es?

Spieler waren $= x$

Gewinnen nun x Spieler 80 fl: so gewinnt einer $\frac{80}{x}$

Gewinnen

Gewinnen aber x+4 Spieler 80 fl.: so gewinnt einer $\frac{80}{x+4}$.

Lezterer Gewinn soll um 1 kleiner sein: so entsteht diese Gleichung

$$\frac{80}{x+4} + 1 = \frac{80}{x}$$

$$\frac{x + 84}{x + 4} = \frac{80}{x}$$

$$x^2 + 84x = 80x + 320$$

$$x^2 + 4x = 320$$

$$x^2 + 4x + 4 = 324$$

$$x + 2 = 18$$

$$x = 16 \text{ Spieler.}$$

198. §. Zwei legen 100 Gulden zusammen. Der erste läßt sein Geld 3 Monate, der andere 2 Monate lang stehen: und jedes Einsaz mit Gewinn beträgt 99 Gulden. Wie viel hat jeder eingesezet.

Des ersten Einsaz = x, für 3 Monate = 3x

Des zweiten Einsaz = 100 — x für 2 Monate = 200 — 2x,

Beider Einsaz für diese Zeiten = 200 + x.

Des

Des ersten Gewinn $= 99 - x$
Des zweiten $= 99 - 100 + x = x - 1$
Beider Gewinn $= 99 - x + x - 1 = 98$

Aus beider Saz, und Gewinn läßt sich der Gewinn eines jeden nach der Gesellschaftsrechnung bestimmen, nämlich

$200 + x$ Gewinnt 98, wie viel $3x$? $\frac{294x}{1200 + x}$

Nun hat man einerlei Gewinn des ersten in zwei Ausdrücken, als $\frac{294x}{200 + x}$ und $99 - x$ daraus entsteht diese Gleichung:

$$\frac{294x}{200 + x} = 99 - x$$

$$294x = 19800 + 99x - 200x - x^2$$

$$x^2 + 395x = 19800$$

$$x^2 + 395x + \left(\frac{395}{2}\right)^2 = 19800 + \left(\frac{195}{2}\right)^2 = 235225$$

$$x + \frac{395}{2} = \frac{485}{2}$$

$$x = \frac{90}{2} = 45$$

$$y = 100 - x = 55$$

Der Gewinn des ersten $= 54$
des zweiten $= 44$,

Denn 45 in 3 Monaten = 135
55 in 2 Monaten = 110

245 gewinnen

98, wie viel 135?

$$\frac{98 \cdot 135}{245} = 54$$

199. §. Zwei verkaufen zusammen 100 Eier, einer mehr als der andere, und lösen beide gleich viel Geld. Hätte der erste so viel gehabt als der zweite: so würde er 15 Kreuzer gelöset haben. Aber der zweite würde $6\frac{2}{3}$ Kreuzer gelöset haben, wenn er die Anzahl des ersten gehabt hätte. Wie viel hat jeder gehabt?

Der erste hat = x
Der zweite = 100 — x

mit 100 — x hätte der erste 15 gewonnen, wie viel mit x?

Antwort $\frac{15x}{100-x}$

Mit x hätte der zweite $\frac{20}{3}$ gewonnen, wie viel mit 100 — x?

Antwort $\frac{2000-20x}{3x}$

Beide

Beide haben gleich viel gelöset: so gibt sich diese Gleichung:

$$\frac{2000 - 20x}{3x} = \frac{15x}{100 - x}$$

$$2000 - 20x = \frac{45x^2}{100 - x}$$

$$200000 - 2000x$$
$$- 2000x + 20x^2 = 45x^2$$
$$200000 - 4000x = 25x^2$$
$$8000 - 160x = x^2$$
$$x^2 + 160x = 8000$$
$$x^2 + 160x + 80^2 = 8000 + 80^2 = 14400$$
$$x + 80 = 120$$
$$x = 120 - 80 = 40$$
$$y = 100 - x = 60$$

Der erste hätte mit 60 Eier 15 kr gewonnen, wie viel mit 40? 10 kr.

Der zweite mit 40 Eier $\frac{20}{3}$ gewonnen, wie viel mit 60? 10 kr.

200. §. Zwei verkaufen etliche Elen Zeug, der zweite 3 Elen mehr, als der erste, und lösen zusammen 35 Thaler. Der erste hätte aus dem Zeuge des zweiten 24 Thaler; und der zweite hätte aus dem Zeuge des ersten $12\frac{1}{2}$ Thaler gelöset. Wie viel Elen hat jeder gehabt?

Der erste $= x$
Der zweite $= x + 3$

aus $x + 3$ hätte der erste 24 gelöset, wie viel aus x? $\frac{24x}{x+3}$

Der zweite hat $\frac{25x + 75}{2x}$ gelöset.

Beide zusammen haben 35 gelöset: so folget die Gleichung:

$$\frac{24x}{x+3} + \frac{25x + 75}{2x} = 35$$

$$\frac{48x^2}{x+3} + 25 + 75x = 70x$$

$$48x^2 + 25x^2 + 75x + 75x + 225 = 70x^2 + 210x$$

$$3x^2 - 60x = -225$$

$$x^2 - 20x = -75$$

$$x^2 + 20x + 10^2 = 10^2 - 75 = 25$$

$$x - 10 = 5$$

$$x = 15$$

$$x + 3 = 18$$

201. §. Zwei Laufer A und B laufen gegeneinander, und gehen zu gleicher Zeit von ihrem Ziele ab. Sie begegnen sich dergestalt, daß A 12 Schritte mehr gemacht hat, als B. Den übri-

übrigen Weg macht A in 2 Minuten, und B macht seinen übrigen in 8 Minuten. Wie gros ist die Entfernung beider Ziele?

Der Weg, den B bis zur Zusammenkunft zurückgeleget hat, sey $= x$: so ist der von A gemachte Weg $= x + 12$; weil A 12 Schritte mehr gemacht hat, als B. Nun muß man suchen in wie viel Zeit jeder seinen Weg gemacht hat.

A macht den Weg x in 2 Minuten: in wie viel den Weg $x + 12$? Antw. $\frac{2x + 24}{x}$

B macht den Weg $x + 12$ in 8 Minut. in wie viel den Weg x? Antw. $\frac{8x}{x + 12}$

Beide haben ihren Weg zu gleicher Zeit gemacht: darum ist die Zeit $\frac{2x + 24}{x} = \frac{8x}{x + 12}$

$$\frac{2x + 24}{x} = \frac{8x}{x + 12}$$

$$2x + 24 = \frac{8x^2}{x + 12}$$

$$2x^2 + 48x + 288 = 8x^2$$

$$288 = 6x^2 - 48x$$

$$48 = x^2 - 8x$$

$$48 + 16 = x^2 - 8x + 16$$

$$64 = x^2 - 8x + 16$$

$$8 = x - 4$$

$$12 = x$$

Die Ziele waren darum 36 Schritte weit von einander entfernet, wovon A 24 und B 12 zurück gelegt hat.

Weil A 12 Schritte in 2 Minuten abgeht: so werden 24 in 4 Minut. abgemacht.

B macht 24 Schritte in 8 Minuten: so werden 12 in 4 Minuten zurückgelegt. Folglich haben beide ihren Weg in 4 Minuten gemacht.

202. §. Zwei Reisende gehen auf Mannheim, der erste von Simmern, der andere von Kreuznach. Sie gehen zu gleicher Zeit ab, und kommen auch zu Mannheim zu gleicher Zeit an. Sie berechnen ihren Weg, und finden, daß sie zusammen 40 Stunde gemacht haben. Der Simmerer hat den Weg von Kreuznach bis Mannheim mit 4 Meilen abgemacht; hingegen brauchte der Kreuznacher 9 Meilen, wenn er von Simmern auf Mannhein gehen solte. Wie weit sind diese Städte von einander entfernet?

Die Entfernung von Mannheim und Kreuznach sey $= x$, die Entfernung von Kreuznach und Simmern sei $= y$. Da nun beide den Weg von Kreuznach bis Mannheim gemacht haben: so ist $2x + y = 40$,

$$y = 40 - 2x$$

Da beide zu ihrem Wege einerlei Zeit verwendet haben: so muß man die Zeit suchen, die jeder dazu gebraucht hat. Der

Der Kreuznacher hätte den Weg von Simmern bis Mannheim, y + x, oder 40 — x in 9 M. gemacht; in wie viel Zeit hat er aber x gemacht? in $\frac{9x}{40-x}$ Zeit.

Der Simmerer hat den x Weg mit 4 M. gemacht; womit hat er 40 — x gemacht? in $\frac{160-4x}{x}$ Zeit.

Nun ist $\frac{9x}{40-x} = \frac{160-4x}{x}$

oder $\frac{9x}{40-x} = \frac{4.(40-x)}{x}$

$$9x^2 = 4.\ (40-x)^2$$

$$9x^2 = (1600 - 80x + x^2).\ 4$$

$$9x^2 = 6400 - 320x + 4x^2$$

$$5x^2 + 320x = 6400$$

$$x^2 + 64x = 1280$$

$$x^2 + 64x + 1024 = 1280 + 1024$$

$$x + 32 = 48$$

$x = 16$ die Weite von Kreuznach, bis Mannheim.

$$y = 40 - 2x$$

$y = 24$ die Weite von Mannheim bis Simmern.

Folglich liegt Simmern von Kreuznach 8 Stunden.
Der Kreuznacher hat bis Mannheim 16 Stunden.
Der Simmerer bis eben dahin 24

Beide zusammen 40 Stunden.

Nennet man die Entfernung von Simmern bis Mannheim $= x$:

So ist die Entfernung von Kreuznach bis Mannheim $40 - x$, weil sie beide zusammen 40 Meilen gemacht haben.

Der Simmerer hat $\frac{4x}{40 - x}$ zu seinem Wege gebraucht, weil er von Kreuznach bis Mannheim 4 Meilen zurück gelegt hat.

Der Kreuznacher hat aber $\frac{360 - 9x}{x}$ gebraucht.

Die Zeiten sind gleich, so entsteht:

$$\frac{360 - 9x}{x} = \frac{4x}{40 - x}$$

$$40 \cdot 360 - 40 \cdot 9x$$
$$- 40 \cdot 9x + 9x^2 = 4x^2$$

$$40 \cdot 360 - 2 \cdot 40 \cdot 9x + 5x^2 = 0$$
$$8 \cdot 360 - 2 \cdot 8 \cdot 9x + x$$
$$x^2 - 144x = -2880$$
$$x^2 - 144x^2 + 72^2 = 5184 - 2880 = 2304$$
$$x - 72 = 48$$
$$x = 120$$

Die.

Diesemnach wäre die Entfernung von 120 Stunden, da doch zuvor nur 24 Stunden dafür gefunden worden sind. Allein hier ist ein Fall zu bemerken, wovon schon 182 §. Meldung geschehen ist. Die Wurzel von $x^2 - 144x + 72^2$ kann so wohl $x - 72$, als $-x + 72$ sein. Die erste ist der Aufgabe zuwieder: so muß dann die zweite statt finden.

$$x^2 - 144x + 72^2 = 2304$$
$$-x + 72 = 48$$
$$72 - 48 = x$$
$$24 = x, \text{ wie zuvor.}$$

Man könnte auch rechter Hand die Wurzel verneint nehmen:

$$x^2 - 144x + 72^2 = 2304$$
$$x - 72 = -48$$
$$x = -48 + 72 = 24$$

203. §. Man suche zwei Zahlen, deren Summe, Inhalt, und Unterschied ihrer Vierecke einander gleich sind.

Eine Zahl sei $= x$, ihre Summe $= x + y$
Die andere $= y$, ihr Inhalt. $= xy$.
Unterschied der Vierecke $= x^2 - y^2$

Diese sind einander gleich: so ist

I. $x + y = xy$

$x = xy - y = y(x - 1)$

$\frac{x}{x-1} = y$

II. $x^2 - y^2 = xy$

$x^2 - \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2}{x-1}$

Die Brüche weg.

$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2$

$x^4 - 3x^3 + x^2 = 0$

mit x^2 getheilet.

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$x^2 - 3x = -1$

ergänzet

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$

$x - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$y = \frac{x}{x-1}$

$y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$y = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}$

Das

Das Wurzellose des Nenners geht hinweg, wenn Zähler und Nenner mit $-1+\sqrt{5}$ vervielfältiget werden (62 §.) Dieses gibt

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Die Summe ist,

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2+\sqrt{5}$$

Der Inhalt ist,

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{8+4\sqrt{5}}{4} = 2+\sqrt{5}$$

Unterschied der Vierecke,

$$\frac{(3+\sqrt{5})^2}{2} - \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2} = \frac{14+6\sqrt{5}}{4}$$

$$-\frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{8+4\sqrt{5}}{4} = 2+\sqrt{5}$$

204. §. Man soll 12 in zwei Theile zerlegen, deren Inhalt 30 ausmache.

Es sei ein Theil $= x$

Der andere $= 12 - x$

Die

Die Gleichung ist

$$12x - x^2 = 30$$

$$x^2 - 12x = -30$$

$$x^2 - 12x + 36 = 36 - 30 = 6$$

$$x = 6 + \sqrt{6}$$

$$12 - x = 12 - 6 - \sqrt{6} = 6 - \sqrt{6}$$

Die zwei Theile sind $6 + \sqrt{6}$, und $6 - \sqrt{6}$

$$\begin{array}{l} 6 + \sqrt{6} \\ 6 - \sqrt{6} \\ \hline 12 \text{ Summe} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 6 + \sqrt{6} \\ 6 - \sqrt{6} \text{ vervielf.} \\ \hline 36 + 6\sqrt{6} \\ \quad - 6\sqrt{6} - 6 \\ \hline 36 - 6 = 30 \end{array}$$

Aufgaben in Buchstaben.

205. §. Ein Vatter ist a Jahre alt, seine Tochter aber b: wie lang wird lezte noch leben müssen, bis sie halb so alt wird, als ihr Vatter?

Die Zeit, welche die Tochter noch zu leben hat, sei = x, so ist ihr ganzes Alter b + x.

Der Vater lebet auch noch die Zeit über, demnach ist sein Alter a + x, wovon das Alter der Tochter b + x die Hälfte sein soll, darum ist

$$a + x = 2b + 2x$$
$$a - 2b = 2x - x$$
$$\frac{a - 2b}{2 - 1} = x$$

Dieser Ausdruck gibt eine Hauptregel, wodurch dergleichen Aufgaben auf einmal gelöset werden, nämlich vom Alter des Vatters ziehe man das zweifache Alter der Tochter ab, so findet sich, wie lang leztere noch leben wird. Es sei nun a = 40, b = 8: so gibt 40 − 16 = 24, die Jahre, die noch zu leben sind.

Solte aber der Vater noch 3mal so alt sein, als seine Tochter: so wird nur 3 an statt 2 gesezet.

206. ?.

206. Eine Zahl finden, deren dritter Theil um a gröser ist als der vierte.

Diese Zahl sei $= x$

So ist $\frac{x}{4} + a = \frac{x}{3}$

$$3x + 12a = 4x$$
$$12a = x$$

Die allgemeine Regel heist nun; man vervielfältige die gegebene Zahl mit 12 als dem Inhalte beider Nenner: so bekömmt man die verlangte Zahl. Z. B. Der dritte Theil soll um 6 gröser sein, als der vierte: so gibt 12 mal 6 $= 72$ die verlangte Zahl. Denn

$$\frac{72}{3} = 24$$
$$\frac{72}{4} = 18$$

Soll die Hälfte um a gröser sein, als der vierte Theil: so ist $\frac{8a}{2} = x$, $4a = x$

Die Hälfte sei um 6 gröser, als der vierte Theil: so gibt 4 mal 6 die Zahl 24.

$$\frac{24}{2} = 12$$
$$\frac{24}{4} = 6$$

207. §. Etliche Trinker bezahlen die Zeche; gibt jeder a Groschen: so fehlen noch an der Zeche b Groschen. Gibt aber jeder c Groschen, so bleiben noch d Groschen übrig. Wie viel Trinker waren da, und wie gros war die Zeche?

Trinker waren an der Zahl $= x$

Jeder bezahlt a, das macht in allem ax, daran fehlen noch b Groschen: so war die Zeche $= ax + b$.

Bezahlet jeder c: so gibt dieses in allem cx, waran noch d Groschen zuviel sind. Die Zeche ist demnach $cx - d$.

Die Gleichung ist

$$ax + b = cx - d$$
$$b + d = cx - ax$$
$$\frac{b + d}{c - a} = x$$

Wieder eine allgemeine Regel für dergleichen Aufgaben, welche auch dazu dienet, dergleichen Aufgaben nach Belieben abzuändern, wenn man an statt der Buchstaben Zahlen sezet. Sollen aber keine Brüche heraus kommen: so muß $b + d$ mit $c - d$ theilbar sein.

208. §. Eine Zahl finden, deren Hälfte, Drittel und Viertel um a gröser ist, als die Zahl selbst.

Diese Zahl sei $= x$

So ist $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - a = x$

$$\frac{13x}{12} - a = x$$

$$13x - 12a = 12x$$

$$x = 12a$$

Die allgemeine Regel ist: die Zahl, um welche diese Theile gröser sind, wird mit dem allgemeinen Nenner dieser Brüche, hier mit 12, vervielfältiget: so entsteht die verlangte Zahl.

Z. B. Die oben genannten Theile sollen um 6 gröser sein: so ist 12 mal 6 = 72 die ganze Zahl.

$$\frac{72}{x} = 36$$

$$\frac{72}{x} = 24$$

$$\frac{72}{4} = 18$$

78 ist um 6 gröser als 72.

209. §. Ihrer zwei haben a Mas Wein in gleiche Theile zu theilen, haben aber nur ein b måsiges und ein c måßiges Gefås zum Ausmessen. Wie sollen sie damit die Theilung zu Stande bringen?

Einer soll so viel als der andere bekommen: folglich jeder $\frac{a}{2}$. Es sey b das gröste und c das kleinste von beiden Gefåsen; der Unterschied zwischen dem kleinsten Gefåse c und $\frac{a}{2}$ sey $= d$.

Könnte man durch die zwei Gefåse zu d Mas gelangen: so bekåme man $\frac{a}{2}$ Mas durch das c måsige Gefås. d Mas wird man bekommen, wenn man das c måsige Gefås so vielmal in das b måsige ausgiest, bis noch d Mas übrig bleiben. Wie oft man nun ausgiest, das nenne man x: so giebt das cx Mas. Diese sollen d Mas übrig lassen, wenn sie in das b måsige ausgegossen werden: so wird das diese Gleichung geben:

$$cx - d = b$$

$$cx = b + d$$

$$x = \frac{b + d}{c}$$

Die allgemeine Regel dazu heist: die Mase des grosen Gefåses und der Unterschied zwischen

M dem

dem kleinen und der Hälfte desjenigen was vertheilet werden solle, werden zusammen gezählet, und mit der Anzahl Mas des kleinen Gefäses getheilet, um zu erfahren, wie oft man das kleine in das grose ausschütten müsse, damit der Unterschied übrig bleibe, der mit dem kleinen das grose füllet.

Es sey z. B. $a = 8$, $b = 5$, $c = 3$, $d = 1$: so ist $x = \frac{5 + 1}{3} = 2$.

Demnach wird das 3 mäsige angefüllet und in das 5 mäsige gegossen; zum zweitenmale wird es aus dem 8 mäsigen wieder angefüllet, und in das 5 mäsige gegossen, welches aber zum zweitenmale nur noch 2 Mas fassen kann, und dann bleibt in dem 3 mäsigen eine Mas übrig. Jezt ist es nicht schwer 4 Mas zu bekommen.

Es ist aber zu merken, daß die Zahlen so beschaffen seyn müssen, damit kein Bruch bei der Theilung heraus komme. So bald demnach die Zahl des grosen Gefäses und des Unterschieds mit der kleinen Zahl nicht theilbar ist: so hat die Aufgabe keinen Plaz. Eine solche ist folgende: mit einem 6 mäsigen und 4 mäsigen soll man 10 Mas in 2 gleiche Theile ausmessen. Hingegen kann man mit einem 7 mäsigen und 3 mäsigen 10 Mas in 2 Theile vertheilen. Es ist nämlich

$$x = \frac{7 + 2}{3}$$

$$x = 3.$$

210 §. Zweierlei Dinge, z. B. Weine werden gemischet; die Mas des ersten kostet a; des zweiten b, daraus sollen d Mas gemischet werden, wovon jede um c verkaufet werden soll. Wie viel soll man von jedem nehmen?

Vom ersten nimmt man $= x$, die kosten ax.
Vom zweiten $= y$, und diese kosten by
Das ganze gemischte kostet $= cd$.

Die Gleichungen sind nun:

I. $x + y = d$ II. $ax + by = cd$

$.b$ $\quad bx + by = bd$ abgez.

$bx + by = bd$ $\quad ax - bx = cd - bd$

$$x = \frac{cd - bd}{a - b}$$

$$x = \frac{(c - b) . d}{a - b}$$

$$\frac{cd - bd}{a - b} + y = d$$

$$\frac{cd - bd}{a - b} - d = y$$

$$\frac{cd - bd - ad + bd}{a - b} = y$$

$$\frac{cd - ad}{a - b} = y$$

$$\frac{(c - a) . d}{a - b} = y$$

Das heißt: um x zu finden wird der Unterschied von c und b mit der Maszahl d vervielfältiget, und mit dem Unterschiede von a und b getheilet.

y wird gefunden, wenn der Unterschied zwischen c und a mit der Maszahl d vervielfältiget, und mit dem Unterschiede von a und b getheilet wird.

Das ist nun die bekannte Vermischungsregel in der gemeinen Rechenkunst.

211. §. Es wird die Dreieckszahl = a gegeben, man soll die Seitenzahl suchen.

Die Seitenzahl sei = x;

so ist die Dreieckszahl $= \frac{x + 1 . x}{2}$ (280 § Rech.)

Demnach wäre $a = \frac{x + 1 . x}{2}$

$$a = \frac{x^2 + x}{2}$$

$$2a = x^2 + x$$

$$2a + \tfrac{1}{4} = x^2 + x + \tfrac{1}{4}$$

$$\frac{8a + 1}{4} = x^2 + x + \tfrac{1}{4}$$

$$\sqrt{\frac{8a + 1}{4}} = x + \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{8a + 1}}{2} - \tfrac{1}{2} = x$$

$$\frac{(\sqrt{8a + 1}) - 1}{2} = x$$

300 Kugeln sollen in ein Dreieck versetzet werden; wie viel werden in eine Seite kommen?

Hier ist $a = 300$,

$$\frac{(\sqrt{8a+1})}{2} = \frac{(\sqrt{2400+1})}{2} = \frac{49}{2},$$

$$\frac{49}{2} - \tfrac{1}{2} = \frac{48}{2} = 24.$$

Die Grundseite des Dreiecks kann 24 Kugeln bekommen, und das ganze Dreieck wird 300 enthalten. Die Probe wird gemacht, wenn man zu 24 die Seitenzahl suchet, nämlich

$$\frac{24 \cdot 25}{2} = 300$$ (280 §. Rech.)

212. §. Da nicht alle Zahlen Dreieckszahlen sind: so fraget es sich, waran man die Dreieckszahl unterscheiden könne?

$$x = \frac{(\sqrt{8a+1}) - 1}{2}$$ ist der allgemeine Ausdruck für alle mögliche Dreieckszahlen, und a ist die Dreieckszahl selbst. Da aber $8a + 1$ unter dem Wurzelzeichen stehen: so muß a eine solche Zahl sein, daß sie 8 mal genommen, und um 1 vermehret eine vollständige Wurzel gebe. Alle andere Zahlen, welche diese Eigenschaft nicht haben, können keine Dreieckszahlen sein.

Es muß eine vollständige Wurzel herauskommen, weil das Dreieck aus ganzen Kugeln gemacht wird. Es gibt aber doch Dreiecke, deren Inhalt nicht aus lauter ganzen Stücken bestehet, wie z. B. ein Dreieck, dessen Inhalt = 20 wäre. Davon ist die Seitenzahl $= \frac{\sqrt{161} - 1}{2}$

Suchet man daraus die Dreieckszahl (280 §. Rech.): so gibt das folgende Arbeit:

$$\frac{\sqrt{161} - 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{161} - 1}{2} + 1$$

$$\frac{\sqrt{161} - 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{161} + 1}{2}$$ gibt wirklich vervielf. folgend.

$$\frac{161}{4} - \frac{\sqrt{161}}{2}$$

$$+ \frac{\sqrt{161}}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{161}{4} - \frac{1}{4} = \frac{160}{4}$$ mit 2 getheilet $= \frac{160}{8}$ = 20 die vorige Dreieckszahl.

213. §. Suchet man aber die größte; oder alle Dreieckszahlen die in 20 sind: so verfährt man dergestalt.

$8a + 1$ muß ein Viereck sein, dieses sei $= x^2$: so ist $8a + 1 = x^2$

$$a = \frac{x^2 - 1}{8}$$

Wenn

Wenn von einem Vierecke 1 abgezogen wird: so muß der Ueberschuß mit 8 theilbar sein. Man suche demnach die Vierecke, welche diese Eigenschaft haben: so werden alle diese Zahlen, die dergestalt herauskommen und unter 20 sind, die Dreieckszahlen geben. Unter allen Viereckszahlen sind nur folgende brauchbar,

8, 25, 49, 81, 121, woraus diese Dreieckszahlen entstehen,

1, 3, 6, 10, 15, wovon 15 die gröste ist.

Will man eine grosse Anzahl Kugeln in einen Spizhaufen sezen: so läßt sich auch finden; wie groß die Seitenzahl der Grundlage sein müsse. Die Gleichung geht aber in höhere Grade, wovon unten.

214. §. Um einen allgemeinen Ausdruck für jede Vieleckszahl zu finden: so seze man die Seitenzahl = x,

Das Vieleck = n

Die Vieleckszahl a ist die Summe von n Gliedern einer Unterschiedsreihe, wozu 1 das erste Glied, und n — 2 die Steigzahl ist. Das lezte Glied ist = $1 + nx - 2x - n + 2$

(196 §. Rech.)

Die Summe $= \frac{2x + nx^2 - 2x^2 - nx + 2x}{2}$

$$= \frac{nx^2 - 2x^2 - nx + 4x}{2}$$

$$= \frac{x^2.(n-2) - x(n-4)}{2} = a$$

Suchet man darin den Werth von x: so bekömmt man einen allgemeinen Ausdruck für jede Vieleckszahl.

215. §. Die Eigenschaften des Theilungsebenmases finden.

Das Ebenmas sei a : b = c : d, oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$

so ist auch a = cb : d, oder $a = \frac{bc}{d}$

ad = bc

Der lezte Ausdruck gibt diese Regel: im Theilungsebenmase ist der Inhalt der äusern Glieder so gros, als der Inhalt der mittlern.

So lang diese Eigenschaft des Ebenmases unverändert bleibt, darf man alle mögliche Versezungen des Ebenmases vornehmen. Z. B.

ad = bc	ad = bc
c : b = c : d	a − b : b = c − d : d
a : c = b : d	a + b : b = c + d : d
c : a = d : b	a : a − b = c : c − d
c : d = a : b	a : a + b = c : c + d
	a + b : a − b = c + d : c − d
	a + c : b + d = a : b
	a − c : b − d = a : b

$$a : b = c : d$$

$$ae : be = c : d$$
$$ae : b = ce : d$$
$$ae : be = cf : df$$

$$\frac{a}{e} : \frac{b}{e} = c : d$$
$$\frac{a}{e} : b = \frac{c}{e} : d$$
$$\frac{a}{e} : \frac{b}{e} = \frac{c}{f} : \frac{d}{f}$$

Der Inhalt verschiedener Ebenmase ist auch ein Ebenmas. Z. B.

$$a : b = c : x$$
$$d : e = x : y$$

$$ad : be = cx : xy$$
$$ad : be = c : y$$

$$a : b = g : h$$
$$c : d = h : i$$
$$e : f = i : x$$

$$ace : bdf = ghi : hix$$
$$ace : bdf = g : x$$

Aus allen Säzen könnte man so viel besondere Regeln beschreiben. So ist die zusammengesezte Regel, und die Kettenregel in die gemeine Rechenkunst gekommen.

216. §. Hier ist noch ein besonderes Ebenmas bei a, b, x zu merken, welches darin besteht,

daß $a - b : b - x = a : x$, d. i. der Unterschied beider ersten verhält sich zum Unterschiede beider lezten, wie die erste zur lezten. Dieses Ebenmas wird das harmonische genennet.

Vermöge dieser Grundgleichung läßt sich jede harmonische Gröse finden. Man soll zum Beisp. die mittlere x zwischen a und b finden.

$$a - x : x - b = a : b$$
$$ax - ab = ab - bx$$
$$ax + bx = 2ab$$
$$x = \frac{2ab}{a+b}$$

D. i. der zweifache Inhalt der gegebenen Grösen, mit ihrer Summe getheilet, gibt die mittlere harmonische.

Im Unterschiedsebenmase ist $\frac{a+b}{2}$ die mittlere zwischen a und b. Wird ab mit $\frac{a+b}{2}$ getheilet: so entstehet $\frac{2ab}{a+b}$, welches das mittlere harmonische Glied zwischen a und b ist. Daraus heist es nun: um das mittlere harmonische Glied zu finden, theile man den Inhalt der äusern Glieder mit ihrer halben Summe. So ist 8 die mittlere harmonische zwischen 6 und 12.

Das

Das Unterschiedsebenmas, und das harmonische haben noch eine besondere Eigenschaft. Aus dem erstern wird ein harmonisches, und aus dem harmonischen wird ein Unterschiedsebenmas, wenn beider Glieder zu Nennern der Zahl 1 werden.

Unt. $a, \frac{a+b}{2}, b$	$\frac{1}{a}, \frac{2}{a+b}, \frac{1}{b}$ harm.
harm. $a, \frac{2ab}{a+b}, b$	$\frac{1}{a}, \frac{a+b}{2ab}, \frac{1}{b}$ Unt.

Denn $\frac{2}{a+b}$ ist der Inhalt von $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ mit der halben Summe von $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ getheilet, und deswegen das mittlere harmonische.

$\frac{a+b}{2ab}$ ist die halbe Summe von $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, und deswegen das mittlere in dem Unterschiedsebenmase. Diese Verwandlung entsteht aber aus den Brüchen.

217. §. Dieses harmonische Ebenmas kann auch zwischen vier Glieder statt haben, alsdann verhält sich auch der Unterschied beider ersten, zum Unterschiede beider lezten, wie das erste zum lezten, z. B. sey a, b, c, x.

$$a - b : c - x = a : x$$

$$ac - ax = ax - bx$$

$$ac = 2ax - bx$$

$$\frac{ac}{2a - b} = x$$

218. §. Man soll in einem Unterschiedsebenmase die vierte ebenmäsige finden.

Die erste sey $= a$
Die zweite $= b$
Die dritte $= c$
Die vierte $= x$

so ist $a - b = c - x$

$$a + x = c + b$$

$$x = c + b - a$$

219. §. Zu a und b soll man die dritte ebenmäsige finden.

Es ist die dritte x, und

$$a - b = b - x$$

$$a + x = 2b$$

$$x = 2b - a$$

220. §. Zu a und b soll die mittlere ebenmäsige gefunden werden.

Die mittlere sey $= x$

so ist $a - x = x - b$

$$a + b = 2x$$

$$\frac{a + b}{2} = x$$

221. §. Zu a, b, c soll man die vierte ebenmäsige im Theilungsebenmase (geometrischen) finden.

Die vierte sey x: so ist

$a : b = c : x$ (Rech. 220. §.)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

$$ax = bc$$

$$x = \frac{bc}{a}$$

Da haben wir die Regel von dreien: um die vierte unbekannte zu finden, theile man den Inhalt der zweiten und dritten mit der ersten.

222. §. Zu a und b die dritte ebenmäsige finden.

Die dritte sey x: so ist

$a : b = b : x$

$$ax = b^2$$

$$x = \frac{b^2}{a}$$

Die drei ebenmäsige wären

$$a,\ b,\ \frac{b^2}{a}$$

223. §. Zu a und b die mittlere ebenmäsige finden.

Die

Die mittlere sey = x; so ist

$$a : x = x : b$$
$$x^2 = ab$$
$$x = \sqrt{ab}$$

die drei ebenmäsigen wären demnach

$$a, \sqrt{ab}, b$$

224. §. Weil das stätige Ebenmas Glieder einer staffelreihe sind: so kann man dasselbe vermittelst des ersten Gliedes und der Steigzahl ausdrücken. z. B.

Das erste Glied sey = a, die Steigzahl = m: so ist das Ebenmas $a : am = am^2 : am^3$, woraus verschiedene Wahrheiten in die Augen fallen, als:

wenn $a : am = am^2 : am^3$

so ist $a : am^2 = a^2 : a^2m^2$

$a : am^3 = a^3 : a^3m^3$

$a : am^4 = a^4 : a^4m^4$

$a : am^x = a^x : a^xm^x$

225. §. Drei Zahlen stehen in einem Unterschiedsebenmase. Wird die erste mit 1 die zweite mit 2, die dritte mit 3 vervielfältiget: so giebt diese Summe a. Ihre Vierecke machen aber b aus. Wie heisen diese Zahlen?

Die erste Zahl sey = x, die Steigzahl = y so ist die zweite = x + y

die dritte = x + 2y

Die

Die Gleichungen sind

$$\begin{array}{l} x \\ 2x + 2y \\ 3x + 6y \\ \hline \end{array}$$

I. $6x + 8y = a$

$$6x = a - 8y$$

$$x = \frac{a - 8y}{6}, \; x^2 = \frac{a^2 - 16ay + 64y^2}{36}$$

II. x^2

$$\begin{array}{l} x^2 + 2xy + y^2 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 \\ \hline \end{array}$$

$$3x^2 + 6xy + 5y^2 = b$$

$3x^2 = \frac{a^2 - 16ay + 64y^2}{12}$ aus der ersten Gleichung

$6xy = ay - 8y^2$ aus der ersten Gleichung

$$\frac{a^2 - 4ay - 32y^2}{12} + 5y^2 = b$$

$$28y^2 - 4ay = 12b - a^2$$

$$y^2 - \frac{ay}{7} = \frac{12b - a^2}{4 \cdot 7}$$

$$y^2 - \frac{ay}{7} + \frac{a^2}{4 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{12b - a^2}{4 \cdot 7 \cdot 7} + \frac{a^2}{4 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{84b - 7a^2 + a^2}{4 \cdot 7 \cdot 7}$$

y =

$$y - \frac{a}{2.7} = \frac{\sqrt{84b - 6a^2}}{2.7}$$

$$y = + \frac{a}{2.7} + \frac{\sqrt{84b - 6a^2}}{2.7}$$

woraus hernach x bestimmet wird.

Die Zinsrechnungen.

226. §. Wie reich wird man nach etlichen Jahren sein: wenn man Zins auf Zinse leget?

Das Kapital sey $= a$
Der Zins $= 5$
Die Zahl der Jahre $= b$
Die gesuchte Summe $= x$

Nach 152. §. der Rech. käme dieser Aufsatz heraus:

$100 : 105 = a$

oder 20 gibt über ein Jahr 21, wie viel a?

$20 : 21 =$
$20 : 21$

oder für 3 Jahre

$20^3 : 21^3 = a$, woraus $\frac{21^3 a}{20^3}$ käme.

Dem-

Demnach wäre $x = \frac{21^3}{20^3} a$

es sey 21 = n, nämlich Kapital und Zins zusammen.

$20 = m$

$3 = c$, so ist $x = a(\frac{n}{m})^c$

Wenn die Zahl der Jahre sehr gros ist: so gibt das eine schwere Rechnung, welche durch Verhältnißzahlen merklich verkürzet wird. l soll anzeigen, daß man von der Gröse, welche diesen Buchstaben bei sich hat, die Verhältnißzahl nehmen solle: so wird $x = a\,(\frac{n}{m})^c$ so ausgedrücket:

$lx = la + c\,(ln - lm)$, der allgemeine Ausdruck für alle dergleichen Aufgaben.

Wie viel werden 6000 Gulden nach 100 Jahren mit Zins auf Zins machen, wenn man 5 von 100 rechnet?

6000 = a das Kapital

100 = c die Jahre

21 = n eben so viel als das Kapital 100 mit 5 Zins

20 = m, das Kapital 100.

Nach Vorschrift der Gleichung suche man die Verhältnißzahlen,

$$l21 = 1,322219$$
$$l20 = 1,301030 \text{ Abzug.}$$

$$l21 - l20 = 21189$$
mit 100 vervielf.

$$100\,(l21 - l20) = 2,118900$$
$$l6000 = 3,778151 \text{ Zusaz}$$

$$100\,(l21 - l20) + l6000 = 5,897051 = lx$$

Um zu dieser Verhältnißzahl die gehörige Zahl zu finden zerlege man dieselbigen

$$3,897051 = l7889 \text{ beinahe}$$
$$\text{Zusaz } 2,000000 = l100$$

$$5,897051 = l(7889.100) = l788900$$

Das Kapital würde in 100 Jahren auf 788900 fl. anwachsen.

Suchet man zu 3,897051 die gehörige Zahl nach der Schärfe (256. §. Rech.): so wird man für x finden $788952\frac{8}{11}$ Gulden.

Wäre das Kapital zu 4 von 100 angeleget: so gäbe sich folgende Rechnung:

$$
\begin{array}{rl}
l104 = & 2,017033 \\
l100 = & 2,000000 \text{ Abzug} \\
\hline
 & ,017033 \\
 & .100 \text{ mal} \\
\hline
 & 1,703300 \\
l6000 = & 3,778151 \text{ Zusatz.} \\
\hline
 & 5,481451 \\
 & 3,481451 = l3030\frac{8}{143} \\
 & 2,000000 = l100
\end{array}
$$

$$5,481451 = l(3030\frac{8}{143}.100) = 303005\frac{85}{143}$$

227. §. In dem allgemeinen Ausdrucke $lx = la + c\,(ln - lm)$ kann man jeden Buchstaben für unbekannt annehmen, und seinen Werth für eben so viel Aufgaben bestimmen. Z. B. $lx - c\,(ln - lm) = la$ wäre für das Kapital, wenn das übrige bekannt wäre:

$\frac{lx - la}{ln - lm} = c$, wie lang das Kapital stehen müßte.

$\frac{lx - la}{c} + lm = ln$, wie hoch der Zins anzusetzen wäre.

n bedeutet aber 100 mit seinem Zinse.

228. §. Zu einem Kapitale a werden jährlich die Zinse geschlagen, und noch eine neue Summe b. Wie gros wird der Ertrag nach c Jahren sein?

Nach dem 1 Jahre ist der Ertrag $= \frac{na}{m} + b$

nach dem 2ten ist das Kapital mit dem Zinse

$(\frac{n}{m})^2 a + \frac{n}{m} b$,

noch b dazu, gibt $= (\frac{n}{m})^2 a + \frac{n}{m} b + b$

Nach dem 3 $= (\frac{n}{m})^3 a + (\frac{n}{m})^2 b + \frac{nb}{m} + b$

nach c Jahren $= (\frac{n}{m})^c a + (\frac{n}{m})^{c-1} b + (\frac{n}{m})^{c-2} b$ $\ldots + b$.

Dieser Ertrag bestehet aus $a(\frac{n}{m})^c$, oder $(\frac{n}{m})^c a$, und aus der Staffelreihe $b(\frac{n}{m})^{c-1} + b(\frac{n}{m})^{c-1}$ $\ldots + b$ worin b das niedrigste oder erste Glied; $b(\frac{n}{m})^{c-1}$ das lezte, die Steigzahl aber $\frac{n}{m}$.

Die

Die Summe dieser Theilungsreihe $= b\left(\frac{n}{m}\right)^c$

$- b : \left(\frac{n}{m} - 1\right)$ (213. §. Rech.) $= mb \left(\frac{n}{m}\right)^c$

$- mb : (n - m)$.

Der ganze Ertrag sey $= x$: so ist

$x = a\,(n:m)^c + (mb\,(n:m)^c - mb):(n-m)$

oder $x = \dfrac{(n-m).\,a\,(n:m)^c + mb\,(n:m)^c - mb}{n - m}$

$a\,(n:m)^c + mb\,(n:m)^c$ werden in Verhältnißzahlen gesuchet, es ist aber $a\,(n:m)^c + mb$

$(n:m)^c = (n:m)^c\,.\,(a + mb)$.

So entsteht $c\,(ln - lm) + l\,(a + mb)$

von $a + mb$ kann insbesondere die Verhältnißzahl nicht gefunden werden; weil a und mb durch Vervielfältigung oder Theilung nicht zusammen gesezet sind.

229. §. Es sey nun $a = 1000$

$$n : m = 21 : 20$$
$$b = 100$$
$$c = 25$$
$$mb = 2000$$

$l21 = 1,322219$
$l20 = 1,301030$ Abzug

$= 21189$
$. 25$ mal.

105945
42378

$0,529725$
$3,477121 = l(1000 + 2000)$

$4,006846 = l\,10158\frac{38}{43}$, das wäre $(n:m)^c$. $(a + mb)$, davon müßte noch $- mb = 2000$ abgezogen werden: so bliebe $8158\frac{38}{43}$ übrig, so stark würde 1000 in 25 Jahren nach obigen Bedingungen anwachsen.

Weil

Weil $n:m = 21:20$ gesezet ist: so wird $n - m = 1$, und macht in der Rechnung keine Hinderniß.

Wenn die Zahl der Jahre gesuchet wird: so wird der Werth von c gesuchet.

$$x = \frac{(n-m).a + (n:m)^c + mb(n:m)^c - mb}{n - m}$$

$$x = \frac{(an - am).(n:m)^c + mb(n:m)^c - mb}{n - m}$$

$$nx - mx = (an - am + mb).(n:m)^c - mb$$

$$nx - mx + mb = (an - am + mb).(n:m)^c$$

$$(nx - mx + mb):(an - am + mb) = (n:m)^c$$

$$l(nx - mx + mb) - l(an - am + mb) = (ln - lm)$$

$$\frac{l(nx - mx + mb) - l(an - am + mb)}{ln - lm.} = c$$

Ein Kapital von 100 fl. zu 5 von 100 soll mit der jährlichen Zulage auf $8158\frac{38}{43}$ anwachsen; wie lang muß es stehen?

Es ist hier $x = 8158\frac{38}{43}$

$$b = 100$$
$$mb = 2000$$
$$n = 21$$
$$m = 20$$
$$a = 100$$
$$nx - mx = 8158\frac{38}{43}$$
$$mb = 2000$$

$$l(nx - mx + mb) = l\,10158\frac{38}{43} = 4,006846$$
$$-l(an - am + mb) = l\,3000 = 3,477121 \text{ Abzug}$$
$$,529725$$
$$: ln - lm = : 21189$$
$$c = 25 \text{ Jahre.}$$

230. §. Soll jährlich b vom Kapitale genommen werden: so bekommen die Glieder, worin b ist, das widrige Zeichen. Z. B.

$$x = (an - am - mb) . (n : m)^c + mb$$
$$l(an - am - mb) + c(ln = lm)$$

Es

Es sey $a = 6000$
$b = 100$ Zusaz
$c = 5$ Jahre

$$\frac{l(an - am - mb) = l(6000 - 2000) = 3,602060}{c(ln - lm) \qquad\qquad = ,105945 \text{ Zus.}}$$

$$15105 \frac{9}{85} = 3,708005$$

$$+ mb = 2000$$

$7105 \frac{9}{85}$, Nur so hoch wird das Kapital in 5 Jahren anwachsen.

231. §. Ist b gröser, als der jährliche Zins: so muß das Kapital immer kleiner werden, und endlich aufgehen. Die Zeit soll gefunden werden, wann dieses nach c Jahren geschehen wird.

Weil das Kapital gänzlich verschwinden soll: so seze man $x = 0$, und es entstehet

$$0 = (an - am - mb) . (n : m)^c + mb$$

$$(mb - an + am) . (n : m)^c = mb$$

$$(n : m)^c = \frac{mb}{mb - an + am}$$

$$c(ln - lm) = l\,mb - l(mb - an + am)$$

$$c = \frac{l\,mb - l(mb - an + am)}{ln - lm}$$

Nun sey $a = 5000$

$b = 100$

$mb = 6000$

$mb - an + am = 1000$

$n = 21$

$m = 20$

$l6000 = 3,778151$

$l1000 = 3,000000$ Abzug

$$0,778151$$

$$ln - lm = : 21189$$

$$36 \frac{15347}{21189} \text{ Jahre}$$

das Kapital wird demnach in 36 Jahren aufgezehret sein.

232. §. Soll gefunden werden, wie viel man jählich von einem Kapitale nehmen dürfe, um es in einer bestimmten Zeit aufzuzehren: so hat man nur den Werth von b zu suchen.

$$o = (an - am - mb).(n:m)^c + mb$$

$$o = \frac{an^{c+1} - amn^c - mn^c b + mb}{m^c}$$

mn

$$\frac{mn^c b}{m^c} - mb = \frac{an^{c+1} - amn^c}{m^c}$$

$$mn^c b - m^{c+1} b = an^{c+1} - amn^c$$

$$b = \frac{an^{c+1} - amn^c}{mn^c - m^{c+1}}$$

$$b = \frac{an^{c+1} - amn^c}{m \cdot (n^c - m^c)}$$

Es sey $a = 100880$
$n = 21$
$m = 20$
$c = 3$

so ist $an^{c+1} - amn^c = 100880 \cdot 21^3$

$$mn^c - m^{c+1} = m.(n^c - m^c) = 20.(21^3 - 20^3)$$

$$b = \frac{100880 \cdot 21^3}{20.(21^3 - 20^3)}$$

$$lb = l\,100880 + 3\,l\,21 - l\,20 - l\,(21^3 - 20^3)$$

$3\,l\,21 = 3,966657$
$l\,100880 = 5,003805$ Zusatz

$8,970462$

$l(21^3$

$$l(21^3 - 20^3) = l\,1261 = 3,100715$$
$$l\,20 = 1,301030 \text{ Zusatz}$$
$$4,401745$$
$$8,970462$$
$$-\;4,401745 \text{ Abzug}$$
$$4,568717 = l\,37044 = b$$

von dem Kapitale 100880 darf man jährlich 37044 nehmen, und das Kapital wird in 3 Jahren aufgezehret.

Soll dieses Kapital samt den Zinsen in 3malen, und jedesmal ebenviel bezahlet werden: so gehöret die Auflösung hieher, nach welcher jährlich 37044 abzutragen wäre, wenn 100800 das Kapital wäre.

233. §. Suchet man das Kapital, das in c Jahren aufgezehret werden soll, wenn man jährlich eine Summe b davon nähme: so suchet man den Werth von a.

$$b = \frac{an^{c+1} - amn^c}{m.(n^c - m^c)}$$

$$m.(n^c - m^c).b = an^{c+1}\ amn^c$$

$$\frac{m.(n^c - m^c).b}{n^{c+1} - mn^c} = a$$

$$\frac{m.(n^c - m^c).b}{n^c.(n - m)} = a$$

Es sey alles, wie zu vor, und $b = 37044$

$$m.(n^c - m^c) = 4,401745$$

$$l\,37044 = 4,568717 \text{ Zusatz}$$

$$8,970462$$

$$n^c.(n - m) = 21^3,3l21 = -\ 3,966657 \text{ Abzug}$$

$$5,003805 = la = 100880.$$

234. §. Gibt man anstatt 37044 fl. ein Gut zu benuzen, das so viel einträgt: so kann man ein Kapital von 100880 fl. darauf nehmen, und in 3 Jahren wird das Gut wieder frei. Würde aber das Gut früher oder später abgetreten: so lies sich auch durch diese Aufgabe bestimmen wie viel einer oder der andere herausgeben müßte.

235. §.

235. §. Die Bezahlung einer gewissen Summe ist erst nach etlichen Jahren festgesezet; wie viel wird dieselbe werth sein, wenn man die Bezahlung jezt gleich verlangt?

Die Summe sey $= a$

Da 100 über ein Jahr 105, oder 20 über ein Jahr 21 betragen: so sind 21 fl. die erst über ein Jahr zahlbar sind, jezt nicht mehr werth, als 20; weil 20 bis dahin nur auf 21 zu 5 von 100 gebracht werden können.

Sind nun $21 : 20 = a$

für 2 Jahre $21 : 20$

für 3 $21 : 20$

$$a \left(\frac{20}{21}\right)^3 \text{ für 3 Jahren.}$$

Die Zahl der Jahre sey $= c$

$20 = m$

$21 = n$

was bar bezahlt wird $= x$: so ist

$$x = a \left(\frac{m}{n}\right)^c$$

$$lx = la + c\,(lm - ln)$$

a sey

$$\begin{aligned} a \text{ sey} &= 27783 \\ c &= 3 \\ l\,27783 &= 4,443780 \\ 3\,l\,20 &= 3,903090 \text{ Zusatz} \\ \hline &\ 8,346870 \\ -\ 3\,l\,21 &= 3,966657 \text{ Abzug} \\ \hline &\ 4,380213 = l\,24000 = x \end{aligned}$$

236. §. Wenn eine Leibrente a auf c Jahre zu bezahlen wäre; wie viel wäre diese werth, wenn man dieselbe jezt verhandeln wollte zu 5 von 100?

Die Rente a, die über ein Jahr fällig wird, ist jezt werth $\frac{20a}{21}$

Die Rente fängt jezt schon an: so ist sie werth

$$a + \frac{20a}{21}$$

$a + \frac{20a}{21}$ ist übers Jahr werth $\frac{20a}{21} + \left(\frac{20}{21}\right)^2 a$, die beim Anfange des Jahres noch fällige Rente a dazu: so ist der Werth für das zweite Jahr =

$$a + \frac{20a}{21} + \left(\frac{20}{21}\right)^2 a$$

für die Jahre $c = a + \frac{20a}{21} + \left(\frac{20}{21}\right)^2 a \ldots \left(\frac{20}{21}\right)^c a$

Die

Die Summe dieser Glieder ist $(\frac{20}{21})^{c+1} a$

$- a : (\frac{20}{21} - 1)$

es sey $20 = m$

$21 = n$

so ist $(\frac{m}{n})^{c+1} a - a : (\frac{m}{n} - 1) = \frac{an(\frac{m}{n})^{c+1} - an}{m - n} = x$

$an (\frac{m}{n})^{c+1}$ in Verhältnißzahlen *gibt es*

$la + ln + c + 1 (lm - ln)$

Es sey $a = 100$, $c = 5$

$l100 = 2,000000$

$l21 = 1,322219$ Zusaz.

$3,322219$

$6(l20 - l21) = - 0,127134$ Abzug

$3,195075 = l1567 \frac{16}{277}$

$1567 \frac{16}{277} : 20 - 21 = - 1567 \frac{16}{277}$

$- an : m - n = - 2100 : 20 - 21 = + 2100$

also ist $x = 2100 - 1567 \frac{16}{277} = 432 \frac{261}{277}$,

der Werth der Rente.

Von

Von den unbestimmten Aufgaben.

237. §. Bis hieher waren die Aufgaben so beschaffen, daß sie Bedingungen genug hatten, um die Unbekannte zu bestimmen, woraus dann so viel Gleichungen erfolgeten als Unbekannten vorkamen. Allein nicht immer werden so viel Bedingungen angegeben, wodurch die Unbekannten gehörig bestimmet würden. Sie sind noch zu allgemein, zu wenig, sie kommen noch mehrern Dingen zu, ohne doch so viele Gleichungen anzugeben, als Unbekannte da sind: dergleichen Aufgaben nennet man unbestimmte. Sie lassen dem Rechner die Freiheit, eine der Unbekannten nach der Lage der Gleichung willkürlich zu bestimmen. Er gibt nämlich einer Unbekannten einen willkürlichen, aber der Gleichung angemessenenen Werth, und suchet daraus den andern. Die Auflösung der Aufgaben kann dieses ausführlicher zeigen.

238. §. Alle Theiler einer Zahl finden.

I.) Suchet man alle einfache Theiler, diese werde in einer Ordnung übereinander geschrieben.

	Theiler
60	1
30	2
15	2
5	3
1	5

Zum Beyspiele sey die Zahl 60, darin 1 der erste Theiler ist. Hernach läßt sich 60 mit 2 theilen, und gibt 30, welche Zahl unter 60, und 2 unter 1 geschrieben werden.

30 läßt sich mit 2 theilen, und gibt 15, beide Zahlen schreibe man wieder gehörig hin.

15 läßt sich mit 3 theilen und gibt 5. Man schreibe 5 und 3 hin.

5 ist mit 5 theilbar, und gibt 1. Man schreibe 1 und 5 hin. Nun sind alle einfache Theiler 1, 2, 2, 3, 5.

II.) Aus den einfachen werden die zusammengesezten Theiler gemacht, nämlich der 3te Theiler 2 wird mit dem zweiten, der über ihm steht, vervielfältiget, und gibt 4, diese 4 wird neben den dritten Theiler geschrieben.

	Theiler					
60	1					
30	2					
15	2	4				
5	3	6	12			
1	5	10	15	20	30	60

Der vierte Theiler 3 wird mit allen über ihm stehenden vervielfältiget, und daraus entstehen folgende, 2 . 3 = 6, 3 . 4 = 12, welche neben 3 in eine Reihe geschrieben werden.

Der vierte Theiler 5 wird mit allen über ihm stehenden vervielfältiget, als: 2 . 5 = 10, 3 . 5 = 15, 4 . 5 = 20, 6 . 5 = 30, 12 . 5 = 60, welche alle in eine Reihe neben 5 geschrieben werden. Auf dieselbige Art verfährt man mit jeder Zahl.

239. §. Die Zahl 37 in zwei Theile zerlegen, daß einer mit 3, der andere mit 5 theilbar sey.

Nennet man einen Theil x, und den andern y: so ist $x + y = 37$

$$x = 37 - y$$

Weis man nun den Werth von y: so läßt sich auch x bestimmen. Da aber keine Umstände mehr bekannt sind: so suchet man y aus den angegebenen Bedingungen zu errathen. Weil y von 37 abgezogen werden soll: so darf y nicht über 37 genommen werden. Dazu muß diese Zahl noch mit 5 theilbar sein. Für y können demnach nur 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, gelten. Der Ueberschuß dieser Zahlen und 37, ist dann für x, aber nur derjenige, der mit 3 theilbar ist. Die Zahlen 15 und 25 lassen nur solche Ueberschüsse übrig, nämlich 27 und 12: so geben diese die verlangten Theile.

Leichter kann man die Aufgabe auf folgende Art lösen.

Eine Zahl sey $= 3x$, weil sie mit 3 theilbar sein soll.

Die andere $= 5y$.

so ist $3x + 5y = 37$

$$x + \frac{5y}{3} = \frac{37}{3}$$

$$x + y + \frac{2y}{3} = 12 + \frac{1}{3}$$

$$x + y + \frac{2y - 1}{3} = 12$$

Nun suche man die Brüche hinweg zu bringen, und seze $2y - 1$ einer Zahl gleich, die mit 3 theilbar ist: so entsteht

$$2y - 1 = 3a$$

Daraus suche man den Werth von y, nämlich

$$y = \frac{3a + 1}{2}$$

Dieser Werth ist noch ein Bruch: man theile wirklich: so gibt sich

$$y = a + \frac{a + 1}{2}$$

es sey $a + 1 = 2b$

so ist $a = 2b - 1$

Damit geht man in $y = a + \frac{a + 1}{2}$ zurück: so bekömmt man

$$y = 2b - 1 + b$$

$$y = 3b - 1$$

Die-

Dieser Werth wird in $x + y + \frac{2y - 1}{3} = 12$ gesezet: so entsteht

$$x + 3b - 1 + \frac{6b - 2 - 1}{3} = 12$$

$$x + 3b - 1 + 2b - 1 = 12$$

$$x = 14 - 5b$$

$$y = 3b - 1$$

Aus beiden lezten Gleichungen lassen sich x und y bestimmen, wenn man für b eine Zahl nach belieben annimmt.

Aus $x = 14 - 5b$ erhellet, daß b höchstens 2 sein kann.

Nach $y = 3b - 1$ darf b nicht geringer als 1 genommen werden.

$b = 1, 2$			
$x = 9, 4$	demnach	$3x =$	$27, 12$
$y = 2, 5$		$5y =$	$10, 25$
			$37, 37$

nähme man $b = 3$: so käme $x = 14 - 5b$, $x = -1$. sezte man $b = 0$: so würde $y = 3b - 1$, $y = -1$, keines von beiden geht an, da man von 37 bejate Theile verlanget. Es sind demnach nur 2 Auflösungen möglich.

Da x durch 5b, und y durch 3b bestimmet wird: so haben alle Werthe von x zur Steigzahl 5, und die von y zur Steigzahl 3, wie man oben sieht. Denn die Werthe von b stehen in einer Staffelreihe. So müssen die Werthe von 5b auch in einer Staffelreihe stehen, wozu 5 die Steigzahl ist, folglich auch 14—5b die Werthe von x. Demnach gibt die Zahl 5 von 5b, die Steigzahl der Werthe von x, und die Zahl 3 von 3b die Steigzahl der Werthe von y. Die Gliederzahl wird durch die Anzahl der Werthe von b bestimmet.

240. §. Man zerlege 100 in zwei Theile, wovon einer mit 6, der andere mit 8 theilbar sey.

Ein Theil $= 6x$

Der andere $= 8y$

$$6x + 8y = 100$$

$$3x + 4y = 50$$

$$x + y + \frac{y}{3} = 16 + \frac{2}{3}$$

$$x + y + \frac{y-2}{3} = 16$$

man seze $y - 2 = 3a$

$$y = 3a + 2$$

folglich $x + 3a + 2 + a = 16$

I. $x = 14 - 4a$, II. $y = 3a + 2$

Für

Für a haben nur folgende Werthe statt, da 4a kleiner sein mus als 14.

$a = 0, 1, 2, 3$		$6x =$	$84, 60, 36, 12$
$x = 14, 10, 6, 2$		$8y =$	$16, 40, 64, 88$
$y = 2, 5, 8, 11$			$100, 100, 100, 100$

Man kann auch in $3x + 4y = 50$ mit 4 theilen.

$$y + \frac{3x - 2}{4} = 12$$

$$3x - 2 = 4a$$

$$x = \frac{4a + 2}{3}$$

$$x = a + \frac{a + 2}{3}$$

$$a + 2 = 3b$$

$$a = 3b - 2 \text{ u. s. w.}$$

241. §. 20 Personen, Männer, Weiber und Töchter verzehren 60 Gulden. Ein Mann bezahlet 5, ein Weib 4, und eine Tochter 2 Gulden. Wie viel Männer, Weiber und Töchter waren es?

Männer waren $= x$, bezahlen $= 5x$
Weiber $= y$, bezahlen $= 4y$
Töchter $= z = 20 - x - y$, bez. $2z = 40 - 2x - 2y$

die ganze Zeche $= 40 + 3x + 2y$

$$40 + 3x + 2y = 60$$
$$3x + 2y = 20$$
$$z + x + \frac{x}{2} = 10$$
$$\frac{x}{2} = a$$
$$x = 2a$$

folglich ist $y + 3a = 10$

I. $y = 10 - 3a$. II. $x = 2a$. III. $z = 10 + 1a$

Für a nehme man folgende Werthe:

a =	1,	2,	3		fl.	fl.	fl.
x =	2,	4,	6	5x =	10,	20,	30
y =	7,	4,	1	4y =	28,	16,	4
z =	11,	12,	13	2z =	22,	24,	26
	20,	20,	20		60,	60,	60

242. §. Ein Bauer verkaufet um 7 Gulden 20 Kreuzer, 15 Stücke Hahnen, Hühner, und Gänse. Ein Hahn kostet 30, ein Huhn 20, und eine Gans 50 Kreuzer. Wie viel Hahnen, Hühner, und Gänse waren es?

Kr.

Es waren Hahnen $= x$, die kosteten $= 30x$

Hühner $= y$ — — $= 20y$

Gänse $= z = 15 - x - y$, $50z = 750 - 50x - 50y$

Zus. $750 - 20x - 30y$

Diese kosten 7 fl. 20 kr; oder 440 kr: so ist die Gleichung

$$750 - 20x - 30y = 440$$

$$31 = 2x + 3y$$

$$15 = x + y + \frac{y-1}{2}$$

$$y - 1 = 2a$$

$$y = 2a + 1$$

$$15 = x + 2a + 1 + a$$

I. $14 - 3a = x$, II. $y = 2a + 1$, III. $z = a$

a bekömmt folgende Werthe

a =	1, 2, 3, 4		
x =	11, 8, 5, 2	30x =	330, 240, 150, 60
y =	3, 5, 7, 9	20y =	60, 100, 140, 180
z =	1, 2, 3, 4	50z =	50, 100 150, 200
	15, 15, 15, 15		440, 440, 440, 440

243. §. Eine Erbschaft wird dergestalt getheilet: ein Sohn bekömmt 300, und eine Tochter 400 Thaler. Bei der Theilung findet sich, daß die Töchter 100 Thaler mehr bekommen haben als die Söhne. Wie viel Söhne und Töchter waren es?

Es waren Söhne $= x$, sie bekommen $= 300x$

Töchter $= y$, — — $= 400y$

$$300x + 100 = 400y$$

$$3x + 1 = 4y$$

$$x = y + \frac{y - 1}{3}$$

$$y - 1 = 3a$$

$$y = 3a + 1$$

$$x = 3a + 1 + a = 4a + 1$$

Für a ist der kleinste Werth 0, und steigt unendlich fort.

$a = 0, 1, 2, 3$ u. s. w.

$x = 1, 5, 9, 13$	$300x = 300, 1500, 2700, 3900$
$y = 1, 4, 7, 10$	$400y = 400, 1600, 2800, 4000$

244. §. Eine Schuld von 323 Gulden soll in Dukaten und Luidoren bezahlet werden, die Dukate zu 5, und die Luidore zu 11 fl. gerechnet. Wie viel muß man von jeder Gattung nehmen?

Von

Von Dukaten nimmt man $= x$, machen $5x$ fl.
von Luidoren $= y$ $11y$

Daraus wird die Gleichung

$$5x + 11y = 323$$

$$x + 2y + \frac{y}{5} = 64 + \frac{3}{5}$$

$$x + 2y + \frac{y - 3}{5} = 64$$

$$\frac{y - 3}{5} = a$$

$$y = 5a + 3$$

$$x + 10 + 6 + a = 64$$

$$x = 58 - 11a, \text{ es ist } y = 5a + 3$$

Hier liegen die Werthe von a zwischen -1 und 6, und sind

$$a = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Daraus machen sich

$$x = 58, 47, 36, 25, 14, 3$$
$$y = 3, 8, 13, 18, 23, 28$$

$$5x = 290, 235, 180, 125, 70, 15$$
$$11y = 33, 88, 143, 198, 253, 308$$

245. §.

215. §. Wochentlich werden 360 Thaler unter Arbeiter vertheilet. Einige bekommen 3, etliche 2 Thaler. Wie viel haben 3, und wie viel haben 2 Thaler bekommen?

Von den erstern waren $= x$, die bekommen $3x$
von den zweitern $= y$, und bekommen $2y$

Die Gleichung gibt

$$3x + 2y = 360$$
$$x = 120 - \frac{2y}{3}$$
$$\frac{2y}{3} = a$$
$$y = \frac{3a}{2}$$
$$y = a + \frac{a}{2}$$
$$\frac{a}{2} = b$$
$$a = 2b$$
$$y = 3b$$
und $x = 120 - 2b$

Von 1 bis 60 kann b alle Werthe haben, als:

$b =$ 1, 2, 3, 4 u. s. w.
$x =$ 118, 116, 114, 112
$y =$ 3, 6, 9, 12

Aus

Aus der zweiten Gleichung $x = 120 - \frac{2y}{3}$ kann man auch die Werthe leicht finden, wenn man für y eine gerade Zahl, die mit 3 theilbar ist, annimmt. In Brüchen sind die Werthe ohne Ende.

246. §. Man hat für 1020 Gulden Korn und Weizen verkaufet, das Malter Korn um 5, und das Malter Weizen um 8 Gulden. Wie viel Malter Korn und Weizen waren es?

Malter Korn waren $= x$, die Kosteten $= 5x$ fl.
Weizen $= y$, $= 8y$

Die Gleichung

$$5x + 8y = 1020$$
$$x = 204 - \frac{8y}{5}$$

Sollen x und y ungebrochene Zahlen sein: so muß für y eine Zahl genommen werden, die mit 5 theilbar ist; sie darf aber über 25 nicht steigen.

$y =$	5,	10,	15,	20,	25
$x =$	196,	188,	180,	172,	164
$8y =$	40,	80,	120,	160,	200
$5x =$	980,	940,	900,	860,	820
	1020,	1020,	1020,	1020,	1020

247. §.

247. §. Zwei haben zusammen 60 Gulden. Theilet der erste die Anzahl seines Geldes mit 4: so bleibt ihm 1 übrig; theilet aber der zweite seine Zahle mit 6: so bleibt hier 5 übrig. Wie viel hatte jeder?

Der erste habe $= 4x + 1$, weil seine Zahl weniger 1 mit 4 theilbar ist.

Der zweite $= 6y + 5$

Die Gleichung

$$4x + 6y + 6 = 60$$
$$2x + 3y = 27$$
$$y = 9 - \frac{2x}{3}$$

$$x = 3,\ 6,\ 9,\ 12$$
$$y = 7,\ 5,\ 3,\ 1$$

$$4x + 1 = 13,\ 25,\ 37,\ 49$$
$$6y + 5 = 47,\ 35,\ 23,\ 11$$

$$60,\ 60,\ 60,\ 60$$

248. §. A hat an B eine Schuld von 8 Gulden zu bezahlen; A hat nichts als Luidoren, und B lauter Dukaten. Wie soll diese Schuld bezahlet werden?

A gibt eine Anzahl Luidore, und B gibt eine Anzahl Dukaten zurück, und ist bezahlet.

A gibt an Luidore $= x$, die machen $= 11x$ fl.
B an Dukaten $= y$, $= 5y$

Weil

Weil A mit 11x die Schuld von 8. fl. abträgt, und 5y herausbekömmt: so entsteht die Gleichung:

$$11x - 5y = 8$$
$$11x - 8 = 5y$$
$$2x - 1 + \frac{x - 3}{5} = y$$
$$\frac{x - 3}{5} = a$$
$$x = 5a + 3$$
$$y = 11a + 5$$

Es sey a = 0, 1, 2, 3, u. s. w.

x = 3,8,13,18 u. s. w. Luidore bezahlet A

y = 5,16,27,38 u. s. w. Dukaten gibt B.

249. §. Soll B die Schuld bezahlen: so ist dir Gleichung

$$5y - 11x = 8$$
$$5y = 8 + 11x$$, wie oben, nur das $+ 11x$ anstatt $- 11x$ steht. Demnach darf man nur die Zeichen bei 3 und 5 ändern:

so hat man $x = 5a - 3$
$$y = 11a - 5$$

a = 1, 2, 3 u. s. w.

x = 2, 7, 12 u. s. w. gibt A

y = 6, 17, 28 u. s. w. gibt B.

250. §. Wie soll man mit einem dreimäsigen und eilfmäsigen Gefäse 4 Mas ausmessen?

Dieses kann anders nicht geschehen, als daß man mit dem dreimäsigen Gefäse etlichemal ausmesse, und mit dem eilfmäsigen etlichemal zurückmesse, damit 4 Mas übrig bleiben. Nun wird die Frage schon bestimmter, und besteht darin: wie vielmal soll man mit dem dreimäsigen Gefäse ausmessen, und wie vielmal mit dem eilfmässigen zurück?

Mit dem dreimäsigen messe man $= x$ mal
mit dem eilfmäsigen $= y$ mal

Durch das erstere werden demnach $3x$ Mas ausgemessen, durch das zweitere $11x$ Mas zurück, nun soll noch 4 Mas übrig bleiben. Deswegen ist die Gleichnng

$$3x - 11y = 4$$

$$3x = 4 + 11y$$

$$x = 1 + 3y + \frac{2y + 1}{3}$$

$$\frac{2y + 1}{3} = a$$

$$2y = 3a - 1$$

$$y = a + \frac{a - 1}{2}$$

$$\frac{a - 1}{2} = b$$

$$a = 2b + 1$$

folg-

folglich $y = 2b + 1 + b = 3b + 1$

und $x = 1 + 9b + 3 + 2b + 1 = 11b + 5$

b kann von 0 an alle Werthe bekommen,

$b = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ u. s. w.

$x = 5, 16, 27, 38, 49, 60, 71$

$y = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$

Demnach mißt man 5mal mit dem dreimäßigen 15 Mas aus, und 1mal mit dem eilfmäßigen 11 Mas zurück, und es bleiben 4 Mas übrig.

Soll aber mit dem dreimäßigen zurück gemessen werden: so ist die Gleichung $11y - 3x = 4$.

251. §. A und B sezen in Luidoren und Dukaten eben viel Geld gegen einander. Wie viel Stücke hat jeder gesezet?

A seze Luidore $= y$, macht in Gulden $= 11y$
B Dukaten $= x$, $= 5x$

Die Gleichung:

$$5x = 11y$$

$$\frac{5x}{11} = y$$

$x = 11, 22, 33, 44, 55$ u. s. w.

$y = 5, 10, 15, 20, 25$ u. s. w.

252. §. Ein Goldschmid hat 14 löthig, 12 und 9 löthig Silber; daraus will er 20 Mark zusammenschmelzen, welche 13 löthig sein sollen. Wie viel soll er von jedem nehmen?

Vom 14 löthigen nimmt er $= x$ Mark
vom 12 — — — $= y$
vom 9 — — — $= z$ od. $20-x-y$

In den x Mark sind $14x$ Loth fein Silber
in y — — $12y$
in z — — $180-9x-9y$

in 20 Mark 13 löthigen sind 260 Loth fein Silber.

Die Gleichung ist

$$14x+12y+180-9x-9y=260$$

$$5x+3y=80$$

$$x=16-\frac{3y}{5}$$

$$z=4-\frac{2y}{5}$$

Für ganze Zahlen muß y mit 5 theilbar sein, und dann hat nur eine Auflösung statt.

$y=5$, darin sind 12 Loth Silber $=60$
$x=13$ — — 14 — — $=182$
$z=2$ — — 9 — — $=18$

260 Loth $=$ 20 Mark.

253. §. Man soll zwei Zahlen finden, deren Inhalt und Summe zusammen 59 machen.

eine Zahl sey $= x$
die andere $= y$

so ist $xy + x + y = 59$

$$xy + x = 59 - y$$

$$x = \frac{59 - y}{y + 1}$$

Soll alles noch genauer bestimmet werden: so seze man $- y + 59$ und theile es mit $y + 1$: so wird im Nenner y verschwinden, weil y überall von einerlei Würde ist. Die Theilung hört aber auf, so bald y verschwunden ist. Demnach ist

$$x = -1 + \frac{60}{y+1} = \frac{60}{y+1} - 1$$

Nun kann man x auch in ungebrochenen Zahlen bestimmen, nämlich $y + 1$ muß ein Theiler von 60 sein. Diesem nach ist

$y = 1, 2, 3, 4, 5$
$x = 29, 19, 14, 11, 9$

254. §. Man suche zwei Zahlen, deren Summe sich zum Unterschiede verhalte, wie 5 zu 3.

eine Zahl sey $= x$
die andere $= y$

so ist $x + y : x - y = 5 : 3$

$$3x + 3y = 5x - 5y$$
$$8y = 2x$$
$$4y = x$$
$$y = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ u. s. w.}$$
$$x = 4, 8, 12, 16, 20 \text{ u. s. w.}$$

Denn $5 : 3 = 5 : 3$
$10 : 6$
$15 : 9$ u. s. w.

255. §. Man suche zwei Zahlen, deren Summe sich zur Summe ihrer Vierecke verhalte, wie 1 zu 4.

Eine Zahl sey $= x$, die andere $= xy$

so ist $x + xy : x^2 + x^2y^2 = 1 : 4$

$$4x + 4xy = x^2 + x^2y^2$$
$$4 + 4y = x + xy^2$$
$$\frac{4 + 4y}{1 + y^2} = x$$

Es sey $y = 2$: so ist $x = \frac{4+8}{1+4} = \frac{12}{5}$, und

$xy = \frac{24}{5}$ denn $\frac{36}{5} : \frac{720}{25} = 1 : 4$

256. §. Die Viereckszahl 49 in zwei Vierecke zerlegen.

Ein Viereck sey $= x^2$, seine Wurzel $= x$
das andere $= y^2$, seine Wurzel $= y$
so ist die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 49.$$

Für y^2 nehme man jedes Viereck an, und x^2 wird dadurch bestimmet. Damit aber x^2 in einer wurzelfähigen Zahl ausfalle, muß $49 - y^2$ auch wurzelfähig sein. Dieses läßt sich genauer bestimmen, wenn man den Werth für y aus dem Verhältnisse mit x herleitet. Demnach kann y als ein Vielfaches von x betrachtet werden, das doch ein solches wäre, wenn die Wurzel von 49 davon abgezogen wird: so wäre $y = ax - 7$

$$y^2 = a^2x^2 - 14ax + 49$$

Dieser Werth wird in erste Gleichung gesetzt und gibt

$$x^2 + a^2x^2 - 14ax + 49 = 49$$
$$x^2 + a^2x^2 = 14ax$$
$$x + a^2x = 14a$$
$$x = \frac{14a}{a^2+1}$$

weil aber $y = ax - 7$

so ist $y = \frac{14a^2}{a^2+1} - 7 = \frac{14a^2 - 7a^2 - 7}{a^2+1} = \frac{7a^2 - 7}{a^2+1}$

wird der lezte Werth wirklich getheilet: so ergibt sich $y = 7 - \frac{14}{a^2+1}$

Für a läßt sich jede Zahl nehmen, woraus der Werth für y bestimmet wird. Soll aber y eine ungebrochene Zahl sein: so muß a^2+1 ein Theiler von 14 sein. Es hat 14 die Theiler 2 und 7, 1 und 14, davon nur 1 genug thut.

Demnach sey $a = 1$

so ist $y = 7 - \frac{14}{1+1} = 7 - 7 = 0$

Da nun $y = 0$ wird: so läßt sich 49 in keine Vierecke von ganzen Zahlen zerlegen. In Brüchen finden sich unendliche Werthe, nachdem man a bestimmt.

$a = 2$ u. s. w.

$x = \frac{28}{5}$, $x^2 = \frac{784}{25}$

$y = \frac{21}{5}$, $y^2 = \frac{441}{25}$

$x^2 + y^2 = \frac{1225}{25} = 49$

257. §.

257. §. Vorige Aufgabe kann man allgemein auflösen, wenn man a^2 anstatt 49, und a anstatt 7 sezet. In diesen Umständen sieht die Ausarbeitung so aus:

I. $x^2 + y^2 = a^2$

$$y = bx - a$$

$$y^2 = b^2x^2 - 2abx + a^2$$

$$x^2 + b^2x^2 - 2abx + a^2 = a^2$$

$$x^2 + b^2x^2 = 2abx$$

$$x + b^2x = 2ab$$

$$x = \frac{2ab}{b^2+1} = a \cdot \frac{2b}{b^2+1}$$

und $y = \frac{ab^2-a}{b^2+1} = a \cdot (\frac{b^2-1}{b^2+1})$

Diese Werthe seze man in die erste Gleichung; zeige aber die Vierecke blos durch Zeichen an, als

$$a^2 \cdot (\frac{2b}{b^2+1})^2 + a^2 \cdot (\frac{b^2-1}{b^2+1}) = a^2$$

Der Nenner $(b^2+1)^2$ schaffe man hinweg:

$$a^2 \cdot (2b)^2 + a^2 \cdot (b^2-1)^2 = a^2 \cdot (b^2+1)^2$$

mit a^2 getheilet

$$(2b)^2 + (b^2-1)^2 = (b^2+1)^2$$

In dieser lezten Gleichung sind zwei vollständige Vierecke einem dritten gleich. Da b nach be-

lieben bestimmt werden kann: so hat man eine Regel zwei solche Zahlen zu finden, deren Vierecke zusammen wieder ein Viereck ausmachen; sie heist nun: **das Zweifache einer jeden Zahl ist eine dieser Zahlen; das um 1 verminderte Viereck der angenommenen Zahl ist die andere Zahl.**

Man nehme die Zahl 3: so ist 6 die erste Zahl,
ihr Viereck = 36

Das Viereck von 3 = 9 weniger 1 ist = 8,
die andere Zahl, ihr Viereck = 64

wieder ein Viereck 100

Man nehme die Zahl 2: so ist 4 die erste Zahl,
ihr Viereck = 16

Das Viereck von 2 = 4 weniger 1 ist 3, die
andere Zahl, ihr Viereck = 9

wieder ein Viereck 25

In der Meßkunst thut diese Aufgabe ihre Dienste, wenn man die Seiten eines recht winklichen Dreieckes entweder angeben, oder prüfen will. Denn darin sind die Vierecke zweier Seiten dem Vierecke der Schrägseite gleich.

Auch kann man aus der Schrägseite eines recht winklichen Dreiecks die beiden andern Seiten finden. Denn das Viereck der Schrägseite

ist

ist immer $= (b^2 + 1)^2$, folglich diese Seite $d = b^2 + 1$, und $d - 1 = b^2$

$$\sqrt{d - 1} = b$$

Es ist aber 2b eine Seite, und $b^2 - 1$ die andere. Soll aber $\sqrt{d - 1}$ eine reine Wurzel geben: so muß d eine solche Zahl sein, daß sie, um 1 verkleinert ein vollständiges Vierck gebe.

258. §. Drei Zahlen finden, daß die Summe zweier Vierecke so gros sey, als das Viereck der grösten Zahl.

Das Viereck der grösten Zahl sey $= z^2$
das mittlere $= x^2$
das kleinste $= y^2$

so ist $z^2 = x^2 + y^2$

x kann um eine gewisse Zahl, z. B. um a kleiner sein als z: so ist

$$x = z - a$$
$$x^2 = z^2 - 2az + a^2$$

Dieser Werth wird in die erste Gleichung gesezet: so bekömmt man

$$x^2 = z^2 - 2az + a^2 + y^2$$
$$2az = a^2 + y^2$$
$$z = \frac{a^2 + y^2}{2a}$$

und $x = z - a$ (wie oben) $= \frac{a^2 + y^2}{2a} - a = \frac{a^2 + y^2 - 2a^2}{2a} = \frac{y^2 - a^2}{2a}$

Nun nehme man für y und a, Zahlen nach belieben an: so werden danach x und z bestimmet werden.

Es sey $a = 1$

- $y = 2, \quad y^2 = 4$

so ist $x = \frac{3}{2}, \quad x^2 = \frac{9}{4}$

$z = \frac{5}{2}, \quad z^2 = \frac{25}{4} = 4 + \frac{9}{4}$

Vermöge dieser Aufgabe kann man auch die vorhergehende lösen, und sich eine ähnliche Regel herausziehen.

Da z die Schrägseite, und $z = \frac{y^2 + a^2}{2a}$

so ist $2az - a^2 = y^2$

$\sqrt{(2az - a^2)} = y$

Ein Muster, wonach man aus der Schrägseite eines recht winklichen Dreieckes, die senkrechten Seiten finden kann.

Von

Von Gleichungen in höhern Würden.

259. §. Jeder Inhalt von Buchstaben zeigt eine besondere Verbindungsart an; ab sind Zweier, abc sind Dreier, und abcd sind Vierer u. s. w. (Rech. 260 §.)

Wenn aber $a + b$ mit $a + c$ vervielfältiget wird: so ist der Inhalt $a^2 + ab + ac + bc$. Es ist aber $ab + ac$ eben so viel, als $a . (b + c)$. Man kann deßwegen $ab + ac$ als ein Glied betrachten; weil in jedem a ist, diese Glieder schreibt man auch unter einander, z. B.

$$a^2 + ab$$
$$+ ac + bc$$

oder so $a^2 + a . (b + c) + bc$

260. §. Dieser Inhalt besteht aus der Würde a^2, aus den Zweiern ab und ac, und aus dem Zweier bc. Will man blos die Verbindungsart der Buchstaben b und c betrachten; so steigt die Verbindung nur auf Zweier, und im zweiten Gliede ist a mit jedem Einser b und c verbunden; im dritten Gliede sind aber die Zweier von b und c, und zwar nur einer: weil in den Wurzeln $a + b$ und $a + c$ auser a auch nur zwei Buchstaben sind. Das erste Glied a^2 ist auch ein Zweier von a und a; weil es aber gleiche Buchstaben sind: so behalten diese den Namen der Würde, und zwar solcher gestalt, daß das

erste

erste Glied die zweite Würde hat, wenn im lezten die Verbindung nur auf Zweier steigt. Ueberhaupt gibt der Würdezeiger des ersten Gliedes die Art der Verbindung an.

261. §. Vervielfältiget man den vorigen Inhalt mit $a+d$, d. i. erstlich mit a und dann mit d: so ist im ersten Gliede des Inhaltes die dritte Würde von a, im zweiten die zweite, im dritten die erste, und im vierten gar *nichts* davon. Von den andern Buchstaben sind im zweiten Gliede die Einser, im dritten die Zweier, und im vierten die Dreier, und zwar nur einer; weil auser a nur 3 Buchstaben da sind.

$$\begin{array}{l} a^2+ab \\ \quad +ac+bc \\ \text{mit } a+d \text{ vervielf.} \\ \hline a^3+a^2b \\ \quad +a^2c+abc \\ \quad +a^2d+abd \\ \qquad +acd+bcd \\ \hline \end{array}$$

Diesen Inhalt vervielf. man noch mit $a+e$: so wird die einmal festgesezte Ordnung dergestalt bleiben, daß die Verbindungen, wie die Glieder steigen. Daraus folget dieses allgemeine Gesez: im ersten Gliede

$$\begin{array}{l} a^3+a^2b \\ \quad +a^2c+abc \\ \quad +a^2d+abd \\ \qquad +acd+bcd \\ \quad \text{mit } a+e \text{ vervielf.} \\ \hline a^4+a^3b \\ \quad +a^3c+a^2bc \\ \quad +a^3d+a^2bd \\ \qquad +a^2cd+abcd \\ \quad +a^3e+a^2be \\ \qquad +a^2ce+abce \\ \qquad +a^2de+abde \\ \qquad\qquad +acde+bcde \\ \hline \end{array}$$

de ist die höchste Würde von a, im zweiten ist die Würde um eine Staffel niedriger und mit allen Einsern der andern Buchstaben vervielfältiget; im dritten die Würde um eine Staffel niedriger und mit allen Zweiern der andern Buchstaben vervielfältiget u. s. w. bis im lezten Gliede die höchste Verbindung der übrigen Buchstaben vorkömmt.

262. §. Nun ist es leicht den Inhalt, von einer gegebenen Anzahl zweigliedriger Wurzeln zu finden, wenn in jeder Wurzel ein Buchstab derselbige ist z. B. von $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$ u. s. w.

1) Man schreibe die Würden von a in einer abnehmenden Reihe, die höchste wird von der Anzahl der Wurzeln genommen; weil hier 4 Wurzeln sind: so gibt es diese Reihe

$$a^4 + a^3 + a^2 + a^1$$

2) Zu dem zweiten Gliede schreibe man mit dem vervielfältigungszeichen alle Einser der übrigen Buchstaben.

$a^3 . (b + c + d + e)$ oder a^3b oder $a^3 . (+ b)$
a^3c $(+ c)$
a^3d $(+ d)$
a^3e $(+ e)$

3) Zu dem dritten schreibe man alle Zweier dieser Buchstaben

$$a^2 . (bc + bd + cd + be + ce + de) = \begin{matrix} a^2bc \\ a^2bd \\ a^2cd \\ a^2be \\ a^2ce \\ a^2de \end{matrix}$$

4) Zu dem vierten schreibe man alle Dreier dieser Buchstaben.

$$a^1 . (bcd + bce + bde + cde) = \begin{matrix} abcd \\ abce \\ abde \\ acde \end{matrix}$$

5) Darauf folgen endlich alle Vierer dieser Buchstaben.

bcde

Die ganze Reihe ist

$$\begin{matrix} a^4 + & a^3b + & a^2bc + & abcd + & bcde \\ & a^3c & a^2bd & abce & \\ & a^3d & a^2cd & abde & \\ & a^3e & a^2be & acde & \\ & & a^2ce & & \\ & & a^2de & & \end{matrix}$$

oder

$$a^4 + a^3 . (b + c + d + e) + a^2 . (bc + bd + cd + be + ce + de) + a . (bcd + bce + bde + cde) + bcde.$$

263. §.

263. §. Wenn in den Wurzeln für b, c, d, e lauter b genommen werden: so werden die Würden von a mit b auf gleiche Art verbunden werden. Da nun in obigem Muster a^3 mit 4 Buchstaben verbunden ist: so muß nun a^3 mit 4b verbunden werden, und dann entsteht $a^3.4b = 4a^3b$.

Im dritten Gliede ist a^2 mit den Zweiern verbunden. Für jeden Zweier wird bb oder b^2 genommen: so bekömmt man $a^2 . 6b^2 = 6a^2b^2$, denn 4 Buchstaben haben 6 Zweier.

Im vierten Gliede ist a mit den Dreiern der 4 Buchstaben verbunden. Für jeden Dreier wird b^3 genommen: so entsteht $a . 4b^3 = 4ab^3$.

Im lezte Gliede ist der Inhalt von 4 Buchstaben, folglich bekömmt man dafür den Inhalt von vier b, nämlich $bbbb = b^4$, der Ausdruck sieht nun so aus:

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

264. §. Die Würden von b stehen für die Einser, Zweier, Dreier und Vierer der andern Buchstaben da, und sind auch ächte Einser, Zweier, Dreier u. s. w. von einerlei Buchstaben. Es müssen demnach in jedem Gliede soviel Würden von b da sein, als Einser, Zweier, Dreier und Vierer darin waren. Deßwegen werden die Mitzähler der Buchstaben gefunden,

wie

wie die Verbindungen. Die Verbindungsart steigt so hoch, als die Würde von a gestiegen ist. Diesem nach kann man jede zweigliedrige Wurzel zu einer beliebigen Würde ohne die gewöhnliche Vervielfältigung erheben, z. B. a + b soll zur 6ten Würde erhoben werden.

1) Schreibe man die 6 Würden von a hin, die höchste steht zur Linken:

$$a^6 \quad a^5 \quad a^4 \quad a^3 \quad a^2 \quad a^1$$

2) Bei dem zweiten Gliede fängt man an, die erste Würde von b zu schreiben, und fährt damit fort bis zur 6ten.

$$a^6 \quad a^5b \quad a^4b^2 \quad a^3b^3 \quad a^2b^4 \quad ab^5 \quad b^6$$

3) Der Mitzähler des zweites Gliedes ist so gros, als der höchste Würdezeiger; er ist 6. Die Zweier dieser Zahl geben den Mitzähler des dritten Gliedes; die Zweier von 6 sind $\frac{6.5}{1.2} = 15$. Die Dreier von 6 machen den Mitzähler für das vierte Glied; diese sind $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$. Die Vierer von 6 geben den Mitzähler für das fünfte Glied; diese sind $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$. Für das sechste Glied sind die Fünfer $\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = 6$.

Zwischen jedes Glied schreibe man das gehörige Zeichen: so hat man die verlangte Würde von $a+b$, nämlich

$$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

265. §. Wird die Wurzel $a-b$ gegeben: so haben diese Glieder $-$, worin b einen ungeraden Würdezeiger hat, nämlich das zweite, vierte, sechste, wo die Einser, Dreier, Fünfer u. s. w. vorkommen, weil $-$ und $-$ einen bejaten Inhalt, hingegen $-$ und $+$ einen verneinten geben.

$$a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

266. §. Eine unbestimmte Würde wird eben so gemacht z. B. Die nte Würde von $a+b$ ist

$$a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + a^{n-4} \text{ u. s. w.}$$

Die zweite Reihe wird sein:

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + a^{n-4}b^4 \ldots$$

Die Mitzähler dazu sind

n, oder $\frac{n}{1}, \frac{n.n-1}{1.2}, \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}, \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} \ldots$

Die ganze Würde ist:

$$a^n + na^{n-1}b + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}a^{n-3}b^3 \ldots$$

Denn der Mitzähler des zweiten Gliedes ist n, weil der Würdezeiger auch n ist.

Der Mitzähler des dritten Gliedes wird von den Zweiern der Zahl n gemacht; diese sind

$$\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$$

Den Mitzähler des vierten Gliedes machen die Dreier der Zahl n; diese sind $\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$ u. s. w.

267. §. Sollte aber b verneint sein: so bekömmt das Glied, das Zeichen —, worin b zum Würdezeiger eine ungerade Zahl hat (263. §.)

268. §. Die Grösen, aus welchen durch Vervielfältigung ein Inhalt entsteht, heisen die **Wurzeln** desselben (157 Rech.) a und b sind die Wurzeln von ab. $a + b$, $a + c$ sind die Wurzeln von dem Inhalte $a^2 + a \cdot (b + c) + bc$. Die Wurzeln von $a^2 + 2ab + b^2$ sind $a + b$, nnd $a + b$. u. s. w. Es ist zu merken, daß nicht immer Würden gemeint sind: wenn von Wurzeln geredet wird; Würden entstehen aus gleichen Wurzeln.

269. §. Gleichungen können auch untereinander vervielfältiget werden; sie haben deßwegen auch

auch ihre Wurzeln, die auch Gleichungen sind. Z. B.

$$\begin{array}{r} x = a \\ y = c \\ \hline xy = ac \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2 + x = a \\ y = b \\ \hline x^2y + x = y\ ab \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{r} x - a = 0 \\ y - c = 0 \\ \hline xy - cx - ay + ac = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2 + x - a = 0 \\ y - b = 0 \\ \hline x^2y + xy - ay - bx^2 - bx + ab = 0 \end{array}$$

270. §. Man nehme folgende drei einfache Gleichungen, und vervielfältige dieselben untereinander.

$$\begin{array}{r} x - 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \\ \hline x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x - 4 = 0 \\ \hline x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0 \end{array}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$. Wird die lezte Gleichung mit einer dieser Wurzeln getheilet: so muß eine Gleichung herauskommen, worin nur noch zwei Wurzeln sind.

271. §. In den Wurzeln $x - 2$, $x - 3$, $x - 4$ sind die Zahlen 2, 3, 4 lauter bejahe

Werthe von x. Denn es war $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$; daraus wird $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$. In der Gleichung $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ sind demnach 2, 3, 4 die bejaten Werthe von x. Wird nun einer davon anstatt x gesezet: so müssen alle Glieder verschwinden; weil die ganze linke Seite mit x einer Nulle gleich wird.

272. §. Werden die Gleichungen $x - 2 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 2 = 0$, mit einander vervielfältiget: so entsteht $x^3 - 6x^2 + 6x - 8 = 0$, worin die eine Seite ein vollständiger Würfel ist. Hat man daraus einen Werth von x: so hat man sie alle.

273. §. Wenn nun eine auf Null gebrachte Gleichung keine vollständige Würde gibt: so sind die Werthe der Unbekannten nicht von einerlei Gröse, wie in $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, worin $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

274. §. In den auf Null gebrachten Gleichungen sind die Werthe, alle bejaet: wenn die Zeichen abwechseln, die $+ -$, $+ -$ u. s. w. aufeinander folgen. Denn in diesem Falle hat die Wurzel ein verneintes Glied. Bei vervielfältigung der Wurzeln entsteht + aus einer geraden, und — aus einer ungeraden Anzahl vervielfältigter Grösen. Diese ungerade Anzahl ge-

ben

ben die Einser, Dreier, Fünfer u. s. w., welche im zweiten, vierten und sechsten Gliede vorkommen, da in dem ersten, dritten, und fünften Gliede. Die Würde vom bejaten x, in den andern die Zweier, Vierer u. s. w. sind.

275. §. Das verneinte Glied der Wurzel ist der bejate Werth der Unbekannten, denn $x - 2 = 0$, folglich $x = 2$. Deßwegen kann man von der Abwechselung der Zeichen einer Gleichung auf die Anzahl der bejaten Werthe schliesen. In $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ sind drei Abwechselungen der Zeichen, nämlich von + in —, von — in +, von + in — folglich auch drei bejate Werthe von x.

276. §. Werden die Gleichungen $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x + 4 = 0$ mit einander vervielfältiget: so entsteht die Gleichung $x^3 + 9x^2 + 26x + 24 = 0$. Darin ist kein einziges Glied verneint, folglich kein bejater Werth für x. Denn $x + 2 = 0$ gibt $x = -2$, $x + 3 = 0$ gibt $x = -3$, $x + 4 = 0$ gibt $x = -4$. Hier ist auch keine Abwechselung der Zeichen, sondern eine Folge derselbigen. Zu Beispielen aller Arten können folgende dienen.

	Wurzeln.	Werthe.
I. $x^2 - 5x + 6 = 0$	$x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$	$x = 2$, $x = 3$
II. $x^2 + 5x + 6 = 0$	$x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$	$x = -2$, $x = -3$
III. $x^2 + x - 6 = 0$	$x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$	$x = 2$, $x = -3$
IV. $x^2 - x - 6 = 0$	$x + 2 = 0$, $x - 3 = 0$	$x = -2$, $x = 3$

277. §. Das lezte Glied ist der Inhalt aller mit x verbundener Glieder (258. §.). Da diese mit x verbundene Glieder, in den auf Nulle gebrachten Gleichungen, Werthe von x sind: so ist auch in dem Falle das lezte Glied, der Inhalt aller Werthe. Die bejaten Werthe sind aber darin verneint, und die verneinten bejaet, weil sie erst auf der andern Seite ihr gehöriges Zeichen bekommen.

278. §. Die Theiler des lezten Gliedes müssen deßwegen die Werthe hergeben. Welche Theiler diese Werthe sind, muß man zu errathen suchen. Mit Vortheil errathen sich dieselben, wenn man sie selbst bestimmet, z. B. $x = -1$,

$$x = 0$$

$$x = 1$$

und einen nach dem in der gegebenen Gleichung anstatt x sezet. Trift man den wahren Werth: so wird sich alles aufheben; wo nicht: so werden dadurch neue Zahlen entstehen.

279. §. Diese angenommene Werthe stehen in einer Staffelreihe, und nehmen von unten auf, um 1 ab. Die Theiler dieser neuen Zahlen müssen deßwegen auch in einer solchen Staffelreihe stehen. Durch dieses Mittel werden schon die Zahlen, die keine Werthe sind, ausgeschlossen. Wenn die bejaten Werthe gesuchet werden, diese aber auf linker Seite verneint

neinte sind: so muß die Staffelreihe der Theiler von unten auf um 1 zunehmen; weil das Zunehmen verneinter Grösen ein wahres Abnehmen ist z. B.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Um die bejaten Werthe von x zu finden seze man $x = -1$, und diesen Werth in die Gleichung, nämlich

$$x = -1$$

$$x^2 = -1 \cdot -1 = 1$$
$$-5x = -5 \cdot -1 = 5$$
$$+6 = 6$$
$$12$$

Auf gleiche Weise seze man $x = 0$, und von der Gleichung wird nur 6 übrig bleiben. Endlich seze man $x = 1$, und diesen Werth in die Gleichung,

$$x = 1$$

$$x^2 = 1 \cdot 1 = 1$$
$$-5x = -5 \cdot 1 = -5$$
$$+6 = 6$$
$$7 - 5 = 2$$

Die Werthe — 1, 0, 1 seze man untereinander, so auch die, durch die Versezung übrig gebliebenen Zahlen, und daneben die Theiler dieser Zahlen, wie man hier sieht:

$x = -1$	12	1.2.3.4.6.12
$x = 0$	6	1.2.3.6
$x = 1$	2	1.2

Nun suche man unter diesen Theilern die von unten auf wachsenden Staffelreihen. Deren finden sich zwei, nämlich 1, 2, 3, und 2, 3, 4, worin die bejaten Werthe von x sind. Die Zahl 6 in der Mitte enthält aber die wahren Werthe von x: so müssen auch die Theiler in der Mitte der Staffelreihe die Werthe von x geben, und diese sind 2 und 3, woraus die Theiler $x - 2$ und $x - 3$ für die Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ entspringen.

In Gleichungen von höhern Würden nimmt die Arbeit zu. Z. B.

für $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$,

$$x = -1$$

$$\begin{aligned} x^3 &= -1^3 = -1 \\ -3x^2 &= -3 \cdot -1^2 = -3 \\ -10x &= -10 \cdot -1 = +10 \\ +24 & = 24 \end{aligned}$$

$$34 - 4 = 30$$

$x =$

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & 1 \\
\hline
x^3 & = 1^3 = & 1 \\
-3x^2 & = -3 \cdot 1^2 = & -3 \\
-10x & = -10 \cdot 1 = & -10 \\
+24 & = & 24 \\
\hline
 & & 25 - 13 = 12
\end{array}
$$

$x = -1$	30	1.2.3.5.6.10.15.30.60
$x = 0$	24	1.2.3.4.6. 8.12.24
$x = 1$	12	1.2.3.4.6.12

Von unten auf finden sich die Staffelreihen 1, 2, 3, und 3, 4, 5, und die Werthe von x sind 2 und 4, die Theiler der Gleichung $x - 2$, $x - 4$.

Ohne Mühe sieht man ein, daß es nicht nothwendig ist, alle Theiler der Zahlen zu finden. Man nehme von der mittlern Zahl 24 den Theiler 2; und sehe ob 3 ein Theiler von 30, und 1 ein Theiler von 12 sind; sie sind es: so ist schon 2 ein Werth.

Von 24 nehme man den Theilrr 3, und sehe, ob 4 ein Theiler von 30 ist; das ist nicht: so ist auch 3 kein Werth von x.

Von 24 nehme man den Theiler 4; so muß 30 den Theiler 5, und 12 den Theiler 3 haben; das haben sie: so ist auch 4 ein Werth von x. u. s. w. wenn man mehrere Werthe verlanget.

280. §. Die Werthe in einer Gleichung werden auf eine besondere Art mit einer Zahl vervielfältiget, nämlich das zweite Glied wird mit der gegebenen Zahl vervielfältiget, das dritte mit dem Vierecke dieser Zahl, das vierte mit dem Würfel derselben u. s. w. z. B.

$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, worin $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$

$\quad \cdot 2 \qquad \cdot 4 \quad \cdot 8$

$x^3 - 18x^2 + 104x - 192 = 0$, darin ist $x = 4$, $x = 6$, $x = 8$, und jeder Werth 2mal gröser.

$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, worin $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$

$\quad \cdot 3 \qquad \cdot 9 \quad \cdot 27$

$x^3 - 27x^2 + 234x - 648 = 0$, darin ist $x = 6$, $x = 9$, $x = 12$

Die Ursache liegt in der Verbindungsart der Grösen, im zweiten Gliede ist die Summe aller Werthe. Wird die Summe mit 2 vervielfältiget: so wird auch jeder Werth so vielmal gröser.

Im dritten Gliede ist die Summe aller Zweier. Einer davon sei z. B. ab. Wird jeder Werth a und b mit 2 vervielfältiget: so wird daraus 2a und 2b, woraus der Zweier $2a \cdot 2b = 4ab$ wird. 4 ist aber das Viereck von 2. Was von ab gesagt ist, gilt für alle Zweier.

Im

Im vierten Gliede sind alle Dreier. Einer davon sei z. B. abc. jeder werde mit 2 vervielfältiget: so entstehet daraus der neue Dreier 2a. 2b. 2c = 8abc. 8 ist der Würfel von 2, und was von abc gesagt ist; ist auch für alle Dreier wahr. Es bleibt auch alles wahr, wenn man anstatt 2 jede andere Zahl nimmt.

281. §. Die Werthe werden etlichemal kleiner: wenn das zweite Glied mit einer Zahl, das dritte mit dem Vierecke, das vierte mit dem Würfel derselben getheilet wird. z. B.

$$\begin{array}{l} x^3 - 18x^2 + 104x - 192 = 0, \text{ worin } x = 4, x = 6, x = 8 \\ \quad\ :2 \qquad\ :4 \qquad :8 \\ \hline x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0, \text{ darin ist } x = 2, x = 3, x = 4 \end{array}$$

Bei der Vervielfältigung und Theilung der Werthe hat man wohl auf die Ordnung der Glieder zu sehen. Wenn die Unbekannten stufenweise folgen, wie in den vorigen Gleichungen: so ist das die gehörige Ordnung. Diese Ordnung ist aber nicht allzeit da. Bald fehlet das Zweite, bald das Dritte, u. s. w. In $x^3 + ax - b = 0$ fehlet das zweite Glied, weil auf x^3 die Würde x^2 folgen muß. In $x^3 + ax^2 - b = 0$ fehlet das dritte Glied, weil x auf x^2 folgen muß. Soll nun jede Gleichung mit 2 vervielfältiget werden: so geht in ersterer Gleichung 2 ab, und die

die Vervielfältigung geschieht durch 4 und 8. In der zweiten geht das dritte ab, darum wird nur mit 2 und 8 vervielfältiget. z. B.

$$\text{I. } x^3 + ax - b = 0 \qquad \text{II. } x^3 + ax^2 - b = 0$$

$$\quad .4 \quad .8 \qquad\qquad\qquad .2 \quad .8$$

$$x^3 + 4ax - 8ab = 0 \qquad x^3 + 2ax^2 - 8b = 0$$

Eben dieses gilt auch bei der Theilung, bei welcher aber noch dieses zu bemerken ist, daß man nicht mit jeder Zahl theilen könne, wenn man keine gebrochene Zahlen zum Antheile haben will. Welche Theiler aber bei einer Gleichung statt haben, zeiget das lezte Glied. z. B. womit müßte $x^3 + 4ax - 8b = 0$ getheilet werden, um die Werthe von x etlichemal kleiner zu machen, ohne einen Bruch zu bekommen. Die Unbekannte steht in der dritten Würde: deßwegen muß das lezte Glied mit einer dritten Würde theilbar sein, diese einzige Würde ist 8, wozu 2 die Wurzel ist.

282. §. Brüche schaffet man aus der Gleichung, wenn man das zweite Glied mit dem Inhalte der Nenner, oder mit einer Zahl, welche mit allen Nennern theilbar ist, vervielfältiget; das dritte mit ihrem Vierecke u. s. w.

$$\text{I.}\quad x^3 - 3x^2 + \frac{11x}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

$$\cdot 4 \quad \cdot 16 \quad \cdot 64$$

$$x^3 - 12x^2 + 44x$$

$$\text{II.}\quad x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{5} - 24 = 0$$

$$\cdot 10 \quad \cdot 10^2 \quad \cdot 10^3$$

$$x^3 - 5x^2 + 20x - 2400 = 0$$

$$\text{III.}\quad x^3 + \frac{2x}{3} - \frac{18}{27} = 0$$

$$\cdot 3^2 \quad \cdot 3^3$$

$$x^3 + 6x - 18 = 0$$

283. §. Weil die Brüche durch die Vervielfältigung des Zählers gröser werden: so ist in der lezten bruchreinen Gleichung der Werth von x auch so vielmal gröser. Demnach ist x in der lezten II. Gleichung 10mal; in der III. 3mal gröser.

284. §. Daß man mit einer Reihe von Würden vervielfältigen müsse, um die Werthe der Unbekannten so vielmal zu vermehren, kann man

man sich auch auf folgende Art begreiflich machen. Dieselbige Gleichung $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ soll vorgenommen, und die Werthe von x mit 2 vervielfältiget werden. Man nehme $2x = y$, nämlich y ist 2mal gröser als x. Aus $2x = y$, wird $x = \frac{y}{2}$. Anstatt x seze man ihren Werth $\frac{y}{2}$. In der lezten

$$x^3 = \frac{y^3}{8}$$
$$-9x^2 = -\frac{9y^2}{4}$$
$$+26x = +\frac{26y}{2}$$
$$-24 = -24$$
$$\frac{y^3}{8} - \frac{9y^2}{4} + \frac{26y}{2} - 24 = 0$$

Gleichung ist nun y 2mal gröser, als x in der andern. Das erste Glied befreie man von seinem Theiler 8, nämlich: $y^3 - \frac{8.9y^2}{4} + \frac{8.26y}{2} - 8.24 = 0$ $y^3 - 2.9y^2 + 4.26y - 8.24 = 0$, worin das zweite Glied mit 2, das dritte mit 2^2, das vierte mit 2^3 vervielfältiget wird. Für 2 läßt sich jede andere Zahl nehmen. Bleibt aber in solcher Gleichung x anstatt y: so ist es natürlich, daß lezteres x auch 2mal gröser sei, als x aus der ersten Gleichung.

Auf-

Aufgaben in höhern Würden.

285. §. Es sind vier Zahlen, wovon jede um 3 gröser ist als die andere. Vervielfältiget man sie alle unter einander: so entsteht der Inhalt 1944. Wie heisen diese Zahlen?

Die erste Zahl ist $= x$
Die zweite $= x + 3$
Die dritte $= x + 6$
Die vierte $= x + 9$

Daraus entsteht durch Vervielfältigung diese Gleichung:

$$x^4 + 18x^3 + 99x^2 + 162x = 1944$$
$$x^4 + 18x^3 + 99x^2 + 162x - 1944 = 0$$

Weil das lezte Glied eine grose Zahl ist: so sehe man, ob sie sich nicht mit der vierten Würde einer Zahl theilen lasse. Weil alle Zahlen mit 3 theilbar sind: so versuche man es damit. Das zweite Glied wird mit 3, das dritte mit 9, das vierte mit 27, und das fünfte mit 81 getheilet. Es thut sich, und gibt

$$\begin{array}{l} x^4 + 18x^3 + 99x^2 + 162x - 1944 = 0 \\ \quad\quad\; 3 \quad\quad\;\; 9 \quad\quad\;\; 27 \quad\quad\; 81 \\ \hline x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 24 = 0 \end{array}$$

x =

			$x = -1$	$x = 1$
$x = -1$	24	x^4	$= +1$	$= +1$
$x = 0$	24	$+6x^3$	$= -6$	$= +6$
$x = 1$	0	$+11x^2$	$= +11$	$= +11$
		$+6x$	$= -6$	$= +6$
		-24	$= -24$	$= -24$
			$12 - 36 = 24$	$= 24 - 24 = 0$

Es ist demnach $x = 1$. Weil aber die Werthe aus der lezten Gleichung 3mal kleiner sind: so ist für die erste Gleichung $x = 3$

$$x + 3 = 6$$
$$x + 6 = 9$$
$$x + 9 = 12$$

268. §. Die Zahl 10 in 4 andere zerlegen, davon eine jede etlichmal gröser ist als die andere. Wird die kleinste mit 8, die zweite mit 4, die dritte mit 3, und die lezte mit 1 vervielfältiget: so wird ihre Summe 16 ausmachen. Welche sind diese Zahlen.

Die erste Zahl sey $= x$
um wievielmal jede gröser ist $= y$
so ist die erste $= x$
die zweite $= xy$
die dritte $= xy^2$
die vierte $= xy^3$.

Die

Die Summe davon soll 10 sein:

I. $x + xy + xy^2 + xy^3 = 10$

$$x = \frac{10}{1 + y + y^2 + y^3}$$

Das erste Glied mit 8, das zweite mit 4, das dritte mit 3, das vierte mit 1 vervielfältiget, soll 16 ausmachen:

II. $8x + 4xy + 3xy^2 + xy^3 = 16$

$$x = \frac{16}{8 + 4y + 3y^2 + y^3}$$

$$\frac{10}{1 + y + y^2 + y^3} = \frac{16}{8 + 4y + 3y^2 + y^3}$$

$$16 + 16y + 16y^2 + 16y^3 = 80 + 40y + 30y^2 + 10y^3$$

$$0 = 64 + 24y + 14y^2 - 6y^3$$

$$0 = 32 + 12y + 7y^2 - 3y^3$$

$$3y^3 - 7y^2 - 12y - 32 = 0$$

$$y^3 - \frac{7}{3}y^2 - 4y - \frac{32}{3} = 0$$

Daraus bringe man die Brüche (280 §.)

$$y^3 - \frac{7}{3}y^2 - 4y - \frac{32}{3} = 0$$

3 9 27

$$y^3 - 7y^2 - 36y - 288 = 0$$

$y = -1$	$y = +1$	$y = -1$	260
$y^3 = -1$	$= +1$	$y = 0$	288
$-7y^2 = -7$	$= -7$	$y = 1$	330
$-36y = +36$	$= -36$		
$-288 = -288$	$= -288$		
$-296 + 36 = -260$	$+1 - 331 = -330$		

Aus den Theilern von 288 kann nur einer von 2, 3, 4, 12 statt haben, und zwar der lezte. Da aber die Gleichung 3mal Gröser geworden ist: so ist 12 auch noch 3mal zu gros. y ist demnach = 4.

$$x + xy + xy^2 + xy^3 = 10$$

$$y = 4$$

$$x + 4x + 16x + 64x = 10$$

$$85x = 10$$

$x = \frac{2}{17}$ die erste Zahl

$\frac{8}{17}$ die zweite

$\frac{32}{17}$ die dritte

$\frac{128}{17}$ die vierte

286. §. Es werden 2 Zahlen gesuchet, deren Inhalt mit ihrer Summe 39 gibt. Wird aber diese Summe von der Summe ihrer Vierecke abgezogen: so kömmt 78 heraus.

Eine Zahl sei $= x$
Die andere $= y$

So sind die Gleichungen:

I.) $xy + x + y = 39$ II.) $x^2 + y^2 - x - y = 78$

$y = \frac{39 - x}{x + 1}$ $x^2 + y^2 = 78 + x + y$

wird dieser Werth von y in die zweite Gleichung getragen: so entsteht diese Gleichung:

$$x^2 + \frac{1521 - 78x + x^2}{x^2 + 2x + 1} = 78 + x + \frac{39 - x}{x + 1}$$

werden die Brüche hinweg geschaffet: so gibt es:

$$x^4 + x^3 - 77x^2 - 273x + 1404 = 0$$

Sezet man in der Gleichung $-1, 0, 1$ anstatt x: so finden sich die Zahlen 1600, 1404, 1056, als:

$$x = -1$$

$x^4 = 1$
$x^3 = -1$
$-77x^2 = -77$
$-273x = 273$
$1404 = 1404$

$1678 - 78 = 1600$

$x = -1$	1600
$x = 0$	1404
$x = 1$	1056

$$\underbrace{x = 1}$$

$$x^4 = 1$$
$$x^3 = 1$$
$$-77x^2 = -77$$
$$-273x = -273$$
$$1404 = 1404$$

$$1406 - 35 = 1056$$

Aus den Theilern von 1404 haben nur 3 und 9 die gehörigen Eigenschaften. Deßwegen ist $x = 3$, und $y = 9$; oder $x = 9$ und $y = 3$.

Diese, und andere Aufgaben, worin nur zwei Unbekannten vorkommen, können auf den zweiten Grad gebracht werden: wenn man jede Zahl aus der halben Summe und dem halben Unterschiede bestimmet. z. B.

Die Summe sei $= 2x$
der Unterschied $= 2y$
so ist die größte Zahl $= x + y$
die kleinste $= x - y$ (142 §.)

Die Gleichungen sind:

I. $x^2 - y^2 + 2x = 39$ II. $2x^2 + 2y^2 - 2x = 78$

$$y^2 = 39 + x - x^2$$

$$x^2 - 39 + x + x^2 + 2x = 39$$

$$x^2 + \frac{x}{2} = 39$$

$$x = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = 6 \text{ u. s. w.}$$

287. §. Man suche drei Zahlen, wovon jede um 7 gröser ist, als die andere, ihr Inhalt macht aber 120.

Die erste Zahl sei $= x$

Die zweite $= x + 7$

Die dritte $= x + 14$

Die Gleichung ist

$$x^3 + 21x^2 + 98x = 120$$

$$x^3 + 21x^2 + 98x - 120 = 0$$

Man erseze x durch $-1, 0, 1$

$x = -1$	$x = 1$
$x^3 = -1$	$x^3 = 1$
$+21x^2 = +21$	$+21x^2 = 21$
$+98x = -98$	$+98x = 98$
$-120 = -120$	$-120 = -120$
$-219 + 21 = -198$	$120 - 120 = 0$

So findet sich schon, daß $x = 1$

folglich $x + 7 = 8$

$x + 14 = 15$

Nun sind die drei Zahlen 1, 8, 15 diejenigen, welche die oben verlangten Bedingungen haben.

288. §. Man suche drei Zahlen aus einem stetigen Ebenmase, die zusammen 21 ausmachen, und wovon die Summe der Vierecke 189 gibt.

Die erste Zahl sei $= x$
Die Steigzahl $= y$
Die zweite $= xy$
Die dritte $= xy^2$

Die Gleichungen sind

$$\text{I. } x + xy + xy^2 = 21$$
$$\text{II. } x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 189$$

Wir wollen die Zahlen in ihre Theiler zerlegen.

$$\text{I. } x \cdot (1+y+y^2) = 3 \cdot 7$$
$$x = 3 \cdot 7 : (1+y+y^2)$$
$$x^2 = 3^2 \cdot 7^2 : (1+y+y^2)^2$$
$$x^2 = 3^2 \cdot 7^2 : (y^4+2y^3+3y^2+2y+1)$$

Dieser Werth von x^2 wird in II. getrageu.

$$\text{II. } x^2 \cdot (1+y^2+y^4) = 3^3 \cdot 7$$
$$\frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot (1+y^2+y^4)}{y^4+2y^3+3y^2+2y+1} = 3^3 \cdot 7$$
$$\frac{7+7y^2+7y^4}{y^4+2y^3+3y^2+2y+1} = 3$$

7 +

$$7 + 7y^2 + 7y^4 = 3y^4 + 6y^3 + 9y^2 + 6y + 3$$

$$4 + 4y^2 = 6y^3 + 2y^2 + 6y$$

$$4y^4 - 6y^3 - 2y^2 - 6y + 4 = 0$$

$$y^4 - \frac{3y^3}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{3y}{2} + 1 = 0$$

$$\cdot 2 \qquad \cdot 4 \qquad \cdot 8 \qquad \cdot 16$$

$$y^4 - 3y^3 - 2y^2 - 12y + 16 = 0$$

Daraus findet sich $y = 1$; weil hier y zweimal gröser ist, als in der vorigen Gleichung: so ist $y = \frac{1}{2}$ die Steigzahl, wodurch aus der ersten Gleichung $x = 12$ gefunden wird, die andern Zahlen sind aber 6 und 3.

289. §. 1540 Kugeln sollen in einen dreieckigen Haufen aufgesezet werden. Wie viel Kugeln können in der Seite der Grundlage liegen?

In der Seite der Grundlage liegen x Kugeln, und im ganzen Haufen liegen $\frac{x \cdot x + 1 \cdot x + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (Rech. 282 §.). Demnach entsteht diese Gleichung:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{6} = 1540$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 9240$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 9240 = 0$$

Sezet man nun anstatt x die Zahlen — 1, 0, 1: so wird man aus der Gleichung die Zahlen 9240, 9240, 9234 finden, deren Theiler folgender gestalt geschrieben werden.

—1	9240	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 10. 11. 12. 14. 15. 20. 21. 22. 24. 28. u. s. w.
0	9240	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 10. 11. 12. 14. 15. 20. 21. 22. 24. 28.
1	9234	1. 2. 3. 6. 9. 18. 19. 27. u. s. w.

Daraus geben sich folgende Reihen

3 4 5 8 11 21

2 3 4 7 10 20

1 2 3 6 9 19

und für x kann nur eine von 2, 3, 4, 7, 10, 20 genommen werden. Man seze jede davon in die Gleichung anstatt x: so wird sich alles bei 20 heben. Demnach ist $x = 20$, und 20 Kugeln kommen in die Seite der Grundlage.

290. §. Es sollen 2109 Kugeln in einen viereckigen Haufen gesezet werden. Wie viel wird eine Seite der Grundlage bekommen?

Eine Seite der Grundlage bekömmt x, und im ganzen Haufen sind Kugeln $\frac{x \,.\, x+1 \,.\, x+2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$

und

und $\frac{x-1 \,.\, x \,.\, x+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ (Rech. 286 §.); daraus entsteht diese Gleichung:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} = 2109$$

$$2x^3 + 3x^2 + x = 12654$$

$$x^3 + \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} = 6327$$

$$x^3 + \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} - 6327 = 0$$

$$.2 \qquad .4 \qquad .8$$

Man schaffe die Brüche heraus (178 §.)

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 50616 = 0$$

Sezet man in der Gleichung anstatt x, — 1, 0, 1: so werden die Zahlen 50616, 50616 und 50610, deren Theiler folgende sind:

—1	50616	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 19, 24, 36, 37, 38 u. s. w.
0	50616	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 19, 24, 36, 37, 38
1	50610	1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42

Daraus finden sich folgende Reihen

3	4	37
2	3	36
1	2	35

Da aber in der lezten Gleichung x 2mal gröser geworden ist: so kann nur 36 dafür gelten, welches 18 für x in der vorlezten Gleichung gibt. Eine Seite des Grundviereckes muß demnach 18 Kugeln bekommen, damit 2109 einen Haufen ausmachen.

291. §. Etliche machen eine Gesellschaft, davon jeder zehnmal so viel Gulden einsezet, als Personen sind. Mit 100 fl. gewinnen sie 8 Gulden mehr, als ihrer sind. Ihr Gewinn zusammen beträgt 288 Gulden. Wie viel Personen waren es?

Personen waren $= x$

Die Einlage für jeden $= 10x$

Alle legen ein $= 10x^2$

Damit gewinnen sie $= \frac{x^3 + 8x^2}{10}$

Denn mit 100 gewinnen sie $x + 8$, wie viel mit $10x^2$? $\frac{x^3 + 8x^2}{10}$.

Die-

Dieser Gewinn beträgt aber 288 fl., demnach ist

$$\frac{x^3 + 8x^2}{10} = 288$$

$$x^3 + 8x^2 = 2880$$

$$x^3 + 8x^2 - 2880 = 0$$

$$\underbrace{x = -1}$$

$$x^3 = -1$$

$$8x^2 = 8$$

$$-2880 = -2880$$

$$-2881 + 8 = 2873$$

$x = -1$	2873
$x = 0$	2880
$x = 1$	2871

$$\underbrace{x = 1}$$

$$x^3 = 1$$

$$8x^2 = 8$$

$$-2880 = -2880$$

$$9 - 2880 = -2871$$

Aus den Theilern von 2880 findet sich $12 = x$, und jeder hat 120 fl. eingesezet.

Die Gleichung $x^3 + 8x^2 - 2880 = 0$, läßt sich auch durch die gehörige Theilung mit 2, 8 auf $x^3 + 4x - 360$ bringen.

290. §.

292. §. Es werden zwei Zahlen gesuchet, deren Inhalt $\frac{10}{9}$ ist, die Vierecke dieser Zahlen machen aber zusammen $\frac{29}{9}$.

Eine Zahl sei $= x$

Die andere $= y$

so ist I. $xy = \frac{10}{9}$

$$y = \frac{10}{9x}$$

$$\text{II. } x^2 + y^2 = \frac{29}{9}$$

$$x^2 + \frac{10^2}{9^2x^2} = \frac{29}{9}$$

$$9^2x^4 + 10^2 = 29 \cdot 9x^2$$

$$9^2x^4 - 29 \cdot 9x^2 + 10^2 = 0$$

$$x^4 - \frac{29x^2}{9} + \frac{10^2}{9^2} = 0$$

Die

Die Brüche bringe man hinweg (178 §.)

$$x^4 - \frac{29 \cdot 3^2 x^2}{9} + \frac{10^2 \cdot 3^4}{9} = 0$$

$$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$$

x wird durch — 1, 1 ersezet und gibt für beide die Zahl 72. Aus den Theilern von 100 sind nur 2 und 3 brauchbar.

Es ist demnach in der lezten Gleichung

$$x = 2, \text{ oder } x = 5$$

Die Werthe sind in der lezten Gleichung noch 3mal so gros, weil die Brüche durch 3 fortgeschaffet worden sind. Folglich ist für die erste Gleichung

$$x = \tfrac{2}{3}, \text{ oder } x = \tfrac{5}{3}$$
$$y = \tfrac{5}{3} \qquad y = \tfrac{2}{3}$$

293. §. Es werden zwei Zahlen gesuchet, deren Inhalt $\frac{15}{56}$ ist, der Unterschied ihrer Vierecke ist $= \frac{889}{3136}$.

Eine Zahl sei $= x$
Die andere $= y$

I.

$$\text{I. } xy = \frac{15}{56}$$

$$y = \frac{15}{56x}$$

$$\text{II. } x^2 - y^2 = \frac{889}{3136} = \frac{127}{448}$$

$$x^2 - \frac{15^2}{56^2x^2} = \frac{127}{448}$$

$$56^2x^4 - 15^2 = \frac{127 \cdot 56^2x^2}{448}$$

$$x^4 - \frac{15^2}{56^2} = \frac{127 \cdot 56x^2}{448}$$

$$x^4 - \frac{127x^2}{8} - \frac{15^2}{56^2} = 0$$

$$x^4 - \frac{127x^2}{8} - \frac{15^2}{7^2 \cdot 8^2} = 0$$

Die Brüche hinweg.

$$x^4 - \frac{127 \cdot 7^2 \cdot 8^2x^2}{8} - \frac{15^2 \cdot 7^4 \cdot 8^4}{7^2 \cdot 8^2} = 0$$

$x^4 -$

$$x^4 - 127 \cdot 7^2 x^2 - 15 \cdot 7^2 \cdot 8^2 = 0$$

$$x^4 - 6223 x^2 - 799680 = 0$$

x wird durch — 1, 1 ersezet, und gibt für beide Werthe die Zahl 805902. Aus den Theilern von 799680 findet sich 21 brauchbar.

So ist $x = 21$ für die lezte Gleichung, worin x 7.8 mal gröser ist.

Demnach ist $x = \frac{21}{7 \cdot 8} = \frac{3}{8}$ für die erste Gleichung

$$y = \tfrac{5}{7}.$$

Ende.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

1000,–
Mai 84

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Niese, Christian

Christian Niesen's hochfürstlich speirischen Hofkammerraths, und der pfä
lzischen ökonomischen Gesellschaft Mitglieds Algebra für Sehende und
Blinde für Sehende und Blinde

Mannheim 1777

Math.p. 378
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082487-8
VD18 10699481